Zusammenfassung Analysis

Michael Gregorius

14. März 2001

Inhaltsverzeichnis

1 Folgen und Grenzwert

- **Was ist eine Folge?**

Eine Folge in einer Menge X ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to X$. Statt $a(n)$ schreibt man meist a_n und die ganze Folge bezeichnet man mit (a_n) bzw. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dabei ist $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ die Menge der Elemente, die in der Folge auftreten. Beispiele:

1. $a_n = c$, $\{a_n | n \in \mathbb{N}\} = \{c\}$
2. $a_n = (-1)^n$, $\{a_n | n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}$
3. $a_n = n$

Dabei braucht X nicht umbedingt $\mathbb{R}$ zu sein. Mit $X = \mathbb{R}^2$ kann man z.B. die folgenden Folgen betrachten:

4. $a_n = \begin{pmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{pmatrix}$ mit $\varphi > 0$
5. $a_n = r^n \begin{pmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{pmatrix}$ mit $q > 0, r > 0$

Unter einer *Folge* reeller Zahlen versteht man also eine Abbildung $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. Jedem $n \in \mathbb{N}$ wird also eine reelle Zahl a_n zugeordnet. Die gesamte Folge $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ wird auch mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet. Ist n_0 eine beliebige natürliche Zahl, dann heißt auch $(a_n)_{n\geq n_0}$ oder $(a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \ldots)$ Folge.

- **Wann heißt eine reelle Zahlenfolge konvergent?**

Eine reele Zahlenfolge ist konvergent, genau dann, wenn folgendes gilt:

$$\exists a \in \mathbb{R} \text{ mit } \forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : (n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$$

a heißt Limes der Folge und man schreibt auch: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Konvergiert (a_n) gegen 0, so heißt die Folge Nullfolge. Konvergiert (a_n) nicht, so heißt die Folge divergent.

Die Aussage oben bedeutet praktisch, daß der Abstand zwischen den Folgegliedern und dem Limeswert, in Abhängigkeit von einem bestimmten n beliebig klein wird. Oder anders gesagt: Ab einem bestimmten $n > n_0$ liegen alle Folgeglieder in einer sogenannten Epsilon-Umgebung $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$.

- **Wann heißt eine Folge konvergent?**

Um diese Frage zu beantworten, müssen wir erst betrachten, was ein metrischer Raum ist. Ein metrischer Raum ist ein $X \neq \emptyset$ mit einer Metrik $d : X \times X \to \mathbb{R}$, wobei folgendes gilt:

1. $\forall x, y \in X : d(x,y) \geq 0$ mit $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\forall x, y \in X : d(x,y) = d(y,x)$
3. $\forall x, y, z \in X : d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$ (Dreiecksungleichung)

Eine Folge (a_n) heißt konvergent, genau dann wenn:

$$\exists a \in \mathbb{R} \text{ mit } \forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : (n > n_0 \Rightarrow d(a_n, a) < \varepsilon)$$

Beispiele für Metriken: In $\mathbb{R}$ ist eine Metrik gegeben durch $d(x,y) = |x-y|$. Ebenso in $\mathbb{C}$: $d(z_1,z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(a_2-a_1)^2 + (b_2-b_1)^2}$ mit $z_k = a_k + b_k \cdot i$. Desweiteren für $\mathbb{R}^d, d \geq 2$ die euklidische Metrik:

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{d} (x_k - y_k)^2}$$

- **Zeige, daß der Limes einer Folge eindeutig bestimmt ist!**

Angenommen eine Folge (a_n) hat zwei Grenzwerte a, a' mit $a \neq a'$. Die Folge konvergiert gegen beide Grenzwerte also kann man eine ε-Umgebung wählen, in der dann fast alle Glieder der Folge liegen. Wir wählen $\varepsilon = \frac{|a-a'|}{2}$. Es gilt nun:

1. Da $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ gibt es ein $N_1 \in \mathbb{N}$, so daß $\forall n \geq N_1 : |a_n - a| \leq \varepsilon$ gilt.
2. Da $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a'$ gibt es ein $N_2 \in \mathbb{N}$, so daß $\forall n \geq N_2 : |a_n - a'| \leq \varepsilon$ gilt.

Nun setzen wir $n = \max\{N_1, N_2\}$. Für dieses n liegen dann alle Glieder in der ε-Umgebung. Daraus folgt jedoch mit Hilfe der Dreiecksungleichung:

$$|a - a'| = |(a - a_n) + (a_n - a')| \leq |a_n - a| + |a_n - a'| < 2\varepsilon = |a - a'|$$

Es folgt also $|a - a'| < |a - a'|$. Ein Widerspruch, also muß $a = a'$ gelten.

- **Wann heißt eine Folge beschränkt?**

Eine Folge (a_n) heißt beschränkt, wenn gilt:

$$\exists c : |a_n| \leq c, \forall n \in \mathbb{N}$$

- **Wann heißt eine Folge (streng) monoton?**

Eine Folge heißt (streng) monoton fallend, wenn gilt:

$$\forall n : a_{n+1} \leq a_n \qquad (a_{n+1} < a_n)$$

Bei (streng) monoton steigenden Folgen ist es analog.

- **Wann heißt eine Folge alternierend?**

Eine Folge heißt alternierend, wenn gilt:

$$\forall n : \mathrm{sgn} a_{n+1} = -\mathrm{sgn} a_n$$

- **Zeige, daß jede konvergente Folge beschränkt ist!**

Sei (a_n) eine konvergente Folge mit $\lim_{n\to\infty}(a_n) = a$. Dann existiert zu $\varepsilon = 1$ ein n_ε, so daß $\forall n > n_\varepsilon : d(a_n, a) < 1$, d.h. $\{a_n | n > n_\varepsilon\} \subseteq \{x | d(x,a) < 1\}$. $\{x | d(x,a) < 1\}$ ist beschränkt und es ist leicht einzusehen, daß eine endliche Anzahl von Folgegliedern auch in jedem Fall beschränkt ist (durch das absolut maximale Element).

- **Was gilt für die Summe konvergenter Folgen?**

Sind (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, so ist auch die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n + b_n$ konvergent und zwar gilt:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = a + b$$

Beweis: Der Beweis läuft ähnlich wie oben. Wir wählen ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Dann ist auch $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. Desweiteren gibt es $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, so daß $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq N_1$ bzw. $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq N_2$. Wieder wählen wir $N = \max\{N_1, N_2\}$. Es gilt dann für alle $n \geq N$:

$$|(a_n + b_n) - (a+b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Beispiel: Gegeben sei $a_n = \frac{n+1}{n} = \frac{n}{n} + \frac{1}{n}$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1 + 0 = 1$$

- **Was gilt für das Produkt zweier konvergenter Folgen?**

Sind (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen mit den Grenzwerten a und b, so ist auch die Folge $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und zwar gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n) = ab$$

Beweis: Wie wir schon gesehen haben, ist jede konvergente Folge beschränkt: Daher gibt es ein $K > 0$, so daß $|a_n| \leq K$ für alle n. Desweiteren können wir annehmen, daß $|b| < K$ gilt. Die Folgen (a_n) und (b_n) sind konvergent, daher können wir annehmen, daß es für jedes $\varepsilon > 0$ zwei Zahlen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2K} \text{ für } n \geq N_1 \text{ bzw. } |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2K} \text{ für } n \geq N_2$$

Auch hier wählen wir $N = \max\{N_1, N_2\}$. Dann gilt für alle $n \geq N$:

$$\begin{aligned}
|a_n b_n - ab| &= |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \\
&\leq |a_n||b_n - b| + |a_n - a||b| \\
&< K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon}{2K} \cdot K \\
&= K \cdot \frac{2\varepsilon}{2K} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Demnach konvergiert auch $(\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen λa, wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ gilt. In diesem Falle wählt man (b_n) mit $b_n = \lambda$.

- **Was gilt für die Differenz zweier konvergenter Folgen?**

Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen, so ist auch $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

Dies folgt aus den Sätzen über die Summe und das Produkt zweier konvergenter Folgen, da $a_n - b_n = a_n + (-1)b_n$.

- **Was gilt für den Quotienten zweier konvergenter Folgen?**
 Sind (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit $\lim a_n = a$ und $\lim b_n = b \neq 0$, so gilt für $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq n_0}$ mit $b_n \neq 0$ für $n \geq n_0$:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$$

Beweis: Zu zeigen ist nur der Spezialfall, daß (a_n) die konstante Folge mit $a_n = 1$ ist, da gilt:

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$$

Da $b \neq 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß

$$|b_n - b| < \frac{|b|}{2} \text{ für alle } n \geq n_0.$$

Daraus folgt $|b_n| \geq \frac{|b|}{2}$, insbesondere $b_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$. Zu einem vorgegebenen ε gibt es dann ein $N_1 \in \mathbb{N}$, so daß

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon |b|^2}{2} \text{ für alle } n \geq N_1$$

. Dann gilt für alle $n \geq N := \max\{n_0, N_1\}$:

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b_n b}\right| = \frac{1}{|b_n||b|} \cdot |b_n - b| < \frac{2}{|b|^2} \cdot \frac{\varepsilon |b|^2}{2} = \varepsilon$$

- **Wann heißt eine Folge bestimmt divergent?**
 Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *bestimmt divergent* gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$, wenn es zu jedem $K \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $a_n > K$ bzw. $a_n < K$ für alle $n \geq N$. Eine solche Folge wird auch *uneigentlich konvergent* genannt. Schreibweise:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \text{ bzw. } \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

2 Reihen

- **Was ist eine Reihe?**

Eine *Reihe* ist eine Folge spezieller Bauart. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Die Folge der *Partialsummen* $s_n := \sum_{k=0}^n a_k$ heißt dann (unendliche) Reihe und wird mit $\sum_{k=0}^\infty a_k$ bezeichnet.

Konvergiert die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so wird ihr Grenzwert ebenfalls mit $\sum_{k=0}^\infty a_k$ bezeichnet. Also ist $\sum_{k=0}^\infty a_k$ zum einen die Folge $(\sum_{k=0}^n a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen, als auch der Grenzwert $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^n a_k$. Es gilt:

$$\sum_{k=0}^\infty a_k \text{ konvergiert (divergiert) } \Leftrightarrow (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert (divergiert)}$$

Eine Reihe konvergiert also, wenn die Folge der Partialsummen konvergiert.

- **Was ist die geometrische Reihe?**

Die *geometrische Reihe* ist gegeben durch

$$\sum_{k=0}^\infty q^k$$

und konvergiert für $|q| < 1$ gegen $\frac{1}{1-q}$ und divergiert für $|q| > 1$.
Beweis: Für $q \neq 1$ ist die Partialsumme explizit angebbar:

$$\sum_{k=0}^n q^k = q^0 + q^1 + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Es gilt nun $\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = \infty$ für $|q| > 1$ und $\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$ für $|q| < 1$. Also auch:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} \text{ für } |q| < 1$$

- **Was gilt für die Summe bzw. Differenz zweier konvergenter Reihen?**

Sind $\sum_{k=0}^\infty a_k$ und $\sum_{k=0}^\infty b_k$ zwei konvergente Reihen, so sind auch $\sum\limits_{k=0}^\infty (a_k \pm b_k)$, sowie $\sum_{k=0}^\infty(\lambda a_k)$ konvergent und es gilt:

$$\sum_{k=0}^\infty (a_k \pm b_k) = \sum_{k=0}^\infty a_k \pm \sum_{k=0}^\infty b_k$$
$$\sum_{k=0}^\infty (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=0}^\infty a_k$$

Beweis: Es sei $c_n := \sum_{k=0}^n a_k$ und $d_n := \sum_{k=0}^n b_k$ jeweils die n-ten Partialsummen. Dann gilt für die Partialsumme $\sum_{k=0}^n (a_k + b_k)$:

$$\sum_{k=0}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^n a_k + \sum_{k=0}^n b_k = c_n + d_n$$

Da der Grenzwert der Reihe der Grenzwert der Folge der Partialsummen ist, gilt:

$$\sum_{k=0}^\infty (a_k + b_k) = \lim_{n\to\infty}(c_n + d_n) = \lim_{n\to\infty} c_n + \lim_{n\to\infty} d_n$$

Entsprechend beweist man die beiden anderen Formeln. Für ein Beispiel mit periodischen Dezimalbrüchen, siehe Forster.

3 Das Vollständigkeitsaxiom

- **Wann heißt eine Folge Cauchy-Folge?**

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl N gibt, so daß gilt:

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \text{ für alle } n, m \geq N$$

Mit anderen Worten: Der Abstand zwischen den Folgegliedern wird für genügend großen Index beliebig klein.

- **Zeige, daß jede konvergente Folge reeller Zahlen eine Cauchy-Folge ist!**

Angenommen, die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a. Dann gibt es zu vorgegebenen ε ein $N \in \mathbb{N}$, so daß

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für alle $n, m \geq N$ gilt dann:

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) - (a_m - a)| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

- **Was besagt das Vollständigkeitsaxiom?**

Das Vollständigkeitsaxiom besagt, daß jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert. Siehe Forster!

- **Was ist ein b-adischer Bruch?**

Für eine Zahl $b \geq 2$ ist ein b-adischer Bruch eine Reihe der Form:

$$\pm \sum_{n=-k}^{\infty} a_n b^{-n}$$

Dabei gilt $k \geq 0$ und $0 \leq a_n < b$. Ist die Basis b bekannt, dann kann man diese Reihe auch in folgender Form angeben:

$$\pm a_{-k} a_{-k+1} \ldots a_{-1} a_0 . a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \ldots$$

Implizit dürfte diese Art der Reihendarstellung b-adischer Brüche jedem Leser bekannt sein. Im Alltag benutzt man b-adische Brüche zur Basis $b = 10$. D.h. die Zahl -23.463 bedeutet:

$$-(2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3})$$

Es gilt nun, daß jeder b-adische Bruch eine Cauchy-Folge ist und sich umgekehrt jede reelle Zahl in einen b-adischen Bruch entwickeln läßt. Um ersteres zu beweisen, muß man zeigen, daß die Folge der Partialsummen eines b-adischen Bruches eine Cauchy-Folge bilden.

Wir definieren also eine Folge $(x_n)_{n\geq -k}$ mit $x_n = \sum_{j=-k}^{n} a_j b^{-j}$.

$$\begin{aligned}
|x_n - x_m| &= \sum_{j=m+1}^{n} a_j b^{-j} \leq \sum_{j=m+1}^{n} (b-1) b^{-j} \\
&= (b-1) b^{-(m+1)} \sum_{j=0}^{n-(m+1)} b^{-j} = \frac{(b-1)}{b^{m+1}} \cdot \frac{1-b^{m-n}}{1-b^{-1}} \\
&\leq \frac{(b-1)}{b^m (b-1)} = b^{-m}
\end{aligned}$$

Da $\lim_{m\to\infty} b^{-m} = 0$ ist. Gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ also ein $m \in \mathbb{N}$, so daß $|b^{-m} - 0| < \varepsilon$. Somit ist ein b-adischer Bruch eine Cauchy-Folge.

- **Was ist eine Teilfolge?**

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ eine Folge natürlicher Zahlen. Dann heißt die Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots)$ Teilfolge der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Es ist unmittelbar einsehbar, daß die Teilfolgen einer konvergenten Folge wieder konvergent sind. Es gibt jedoch noch eine Aussage bezüglich nicht konvergenten Folgen:

- **Zeige, daß jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge besitzt!**

Dies ist der *Satz von Bolzano-Weierstraß*. Da die Folge beschränkt ist, liegen also alle ihre Folgeglieder in einem Intervall $I_0 = [A, B]$. Wir wollen nun eine konvergente Teilfolge konstruieren. Als erstes Glied a_{n_0} nehmen wir in jedem Fall a_0. Im Intervall $[A, B]$ liegen unendlich viele Folgeglieder. Wir werden nun eine Folge von Intervallen definieren, so daß folgendes gilt:

1. Jedes Intervall $I_k, k \in \mathbb{N}$ enthält unendlich viele Glieder der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. $I_k \subseteq I_{k-1}$ für alle $k \geq 1$.

3. $\mathrm{diam}(I_k) = 2^{-k}\mathrm{diam}(I_0)$.

Das Intervall $I_{k+1} = [A_{k+1}, B_{k+1}]$ erhält man dabei wie folgt aus dem Intervall $I_k = [A_k, B_k]$: Halbiere das Intervall I_k und nehme das Intervall als I_{k+1}, in dem unendlich viele Folgeglieder liegen. Dieses neue Intervall entspricht immer noch dem Punkten 1-3, so daß man dieses Verfahren beliebig fortsetzen kann.

Als Element a_{n_k} nehmen wir ein beliebiges Element aus dem Intervall I_k. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß die Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Es sei ein ε vorgegeben. Wir wählen nun ein N, so daß gilt: $\mathrm{diam}(I_N) < \varepsilon$. Für alle $k, j < N$ gilt nun:

$$a_{n_k} \subseteq I_k \subseteq I_N \text{ und } a_{n_j} \subseteq I_j \subseteq I_N$$

Also gilt doch:

$$|a_{n_k} - a_{n_j}| \leq I_N < \varepsilon$$

Mit anderen Worten: Da sich die Größe der Intervalle in jedem Schritt halbiert, kann ihre Größe beliebig klein werden. Alle Folgeglieder liegen ab einem bestimmten Punkt in einem solchen Intervall, also kann ihr Abstand auch beliebig klein gemacht werden.

- **Was ist ein Häufungspunkt?**

Eine Zahl a heißt Häufungspunkt einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wenn es eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$ gibt. Es muß also eine Teilfolge geben, die gegen a konvergiert. Zum Beispiel besitzt die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Häufungspunkte -1 und 1, da die Teilfolgen $((-1)^{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ und $((-1)^{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen -1 bzw. 1 konvergieren.

- **Zeige, daß jede beschränkte und monotone Folge konvergiert!**

Die Folge ist beschränkt und besitzt somit nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Sei a der Grenzwert dieser Teilfolge. Wir zeigen nun, daß dann aufgrund der Monotonie auch die ganze Folge gegen a konvergiert: Zumindest gibt es für die konvergente Teilfolge zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$, so daß alle Glieder der Teilfolge in der ε-Umgebung liegen. Da die Folge monoton ist, folgt daraus, daß dann auch alle anderen Folgeglieder in der ε-Umgebung liegen müssen, denn sie werden von den Gliedern der Teilfolge eingeschlossen:

$$a_{n_k} < a_i < a_{i+1} < \cdots < a_{n_{k+1}}$$

4 Konvergenzkriterien für Reihen

- **Was ist das allgemeine Cauchysche Konvergenzkriterium?**

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq m \geq N$$

<u>Beweis:</u> Es sei $s_p := \sum_{k=0}^{p} a_k$ die p-te Partialsumme. Dann gilt:

$$s_n - s_{m-1} = \sum_{k=m}^{n} a_k$$

Also ist die Folge der Partialsummen eine Cauchy-Folge und damit die Reihe konvergent, da jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert.

- **Was ist eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für die Konvergenz einer Reihe?**

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ gilt.
<u>Beweis:</u> Die Reihe konvergiert, also gilt das allgemeine Cauchysche Konvergenzkriterium:

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq m \geq N$$

Insbesondere gilt dann doch für $m = n$:

$$(|a_n - 0| =)|a_n| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N$$

Also $\lim_{n\to\infty} = 0$. Jedoch gilt die Umkehrung hiervon *nicht!* Dies zeigt schon das Beispiel $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

- **Was besagt das Leibniz'sche Konvergenzkriterium?**

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge lauter nicht-negativer Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann konvergiert folgende Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

<u>Beweis:</u> Es ist zu zeigen, daß die Folge der Partialsummen eine monoton steigende, beschränkte Teilfolge und eine monoton fallende, beschränkte Teilfolge enthält und die Grenzwerte dieser Teilfolgen identisch sind. Zuletzt zeigt man noch, daß die gesamte Folge gegen diesen Grenzwert konvergiert.

Die Partialsumme s_k sei gegeben durch $s_k = \sum_{n=0}^{k} (-1)^n a_n$. Wir betrachten zunächst die Folge der Partialsummen $(s_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$. Es gilt:

$$s_{2k+2} - s_{2k} = -a_{2k-1} + a_{2k} \leq 0$$

Daraus folgt $s_{2k+2} \leq s_{2k}$ und somit insgesamt:

$$s_0 \geq s_2 \geq s_4 \geq \cdots \geq s_{2k} \geq s_{2k+2} \geq \ldots$$

Nun betrachten wir die Folge der Partialsummen $(s_{k+1})_{k\in\mathbb{N}}$. Hier gilt:

$$s_{2k+3} - s_{2k+1} = a_{2k+2} - a_{2k+3} \geq 0$$

Hieraus wiederum folgt $s_{2k+3} \geq s_{2k+1}$. Insgesamt:

$$s_1 \leq s_3 \leq \cdots \leq s_{2k+1} \leq s_{2k+3} \leq \ldots$$

Aus $s_{2k+1} - s_{2k} = -a_{2k+1} \leq 0$ folgt, daß ein Folgenglied, welches auf ein anderes folgt, höchstens genauso groß ist wie der Vorgänger.
Die Folge $(s_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist also monoton fallend und beschränkt. Also existiert

$$\lim_{k\to\infty} s_{2k} = S.$$

Ebenso ist $(s_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ monoton steigend und beschränkt. Denentsprechend existiert

$$\lim_{k\to\infty} s_{2k+1} = S'$$

Nun zeigen wir, daß $S = S'$ ist. Es gilt:

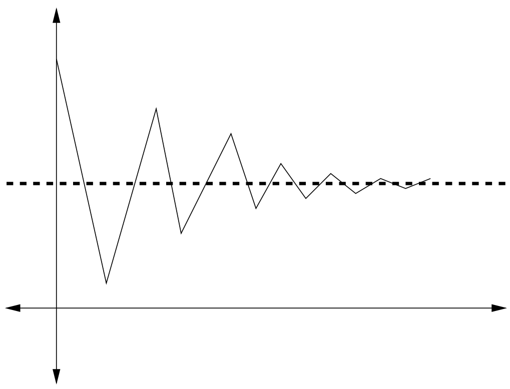
$$S - S' = \lim_{k\to\infty}(s_{2k+1} - s_{2k}) = \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = 0$$

Es bleibt nur noch zu zeigen, daß die ganze Folge konvergiert. Sei ε vorgegeben. Dann existieren $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, so daß

$$|s_{2k} - S| < \varepsilon \text{ für } k \geq N_1 \text{ und } |s_{2k+1} - S| < \varepsilon \text{ für } k \geq N_2$$

Jetzt setzen wir $N := \max\{2N_1, 2N_2 + 1\}$ und es gilt:

$$|s_n - S| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N$$



- **Gebe Beispiele für Reihen, die nach dem Leibniz'schen Konvergenzkriterium konvergieren!**

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$

2. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$

- **Wann heißt eine Reihe absolut konvergent?**

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert. Jede absolut konvergente Reihe konvergiert auch im herkömmlichen Sinne.

- **Zeige, daß eine absolut konvergente Reihe auch im gewöhnlichen Sinne konvergent ist!**

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ sei konvergent, d.h.:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq n_0 : \left| \sum_{k=m}^{n} |a_k| \right| = \sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon$$

Nach der verallgemeinerten Dreiecksungleichung gilt jedoch:

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon$$

Jedoch konvergiert *nicht* jede konvergente Reihe absolut! Ein Beispiel ist die alternierende geometrische Reihe.

- **Was ist das Majoranten-Kriterium?**

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ eine konvergente Reihe mit $c_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Desweiteren sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge für deren Glieder $|a_n| \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_k$ absolut.
<u>Beweis:</u> Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert, also konvergiert sie auch nach dem Cauchy-Kriterium und es gilt:

$$\left(\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| \leq \right) \sum_{k=n}^{m} |a_k| \leq \sum_{k=n}^{m} c_k \leq \varepsilon \text{ für alle } m, n \geq n_\varepsilon$$

- **Was ist das Quotienten-Kriterium?**

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe und desweiteren gelte $0 < q < 1$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut, wenn es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß gilt:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q \text{ für alle } n \geq n_0$$

Desweiteren müssen natürlich alle $a_n \neq 0$ sein, für alle $n \geq n_0$.
<u>Beweis:</u> Wir ändern am Konvergenzverhalten der Reihe nichts, wenn wir endlich viele Glieder abändern. Daher können wir annehmen:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

Dann ergibt sich per vollständiger Induktion:

$$|a_{n+1}| \leq |a_n| \cdot q \leq |a_{n-1}| \cdot q^2 \leq \cdots \leq |a_0| \cdot q^{n+1}$$

Allgemein also $|a_n| \leq |a_0| \cdot q^n$. Also ist $\sum_{n=0}^{\infty} |a_0| \cdot q^n$ für $0 < q < 1$ eine konvergente Majorante, da dies die geometrische Reihe ist. Damit konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.

- **Was ist das Wurzelkriterium?**

Auch das Wurzelkriterium läuft auf eine konvergente Majorante hinaus. Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Folge. Gibt es ein $0 < q < 1$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q \text{ für alle } n \geq n_0$$

dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.
Beweis: $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ ist gleichbedeutend mit $|a_n| \leq q^n$ und damit ist die geometrische Reihe wieder eine konvergente Majorante.

- **Was weißt du zur Umordnung von Reihen?**

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe mit Grenzwert c, dann konvergiert auch jede Umordnung von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ gegen c.

5 Funktionen und Stetigkeit

- **Was ist eine Funktion?**

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Unter einer reellen Funktion versteht man eine Abbildung $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Dabei heißt D der *Definitionsbereich*. Der *Graph* einer Funktion f ist

$$\Gamma_f = \{(x,y) \subset D \times \mathbb{R} | y = f(x)\}.$$

Für Beispiele siehe Forster.

- **Was ist eine Polynomfunktion? Was eine rationale Funktion?**

Seien $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$x \mapsto a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

eine *Polynomfunktion*.
Sind $p(n)$ und $q(n)$ Polynome

$$p(n) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$
$$q(n) = a_m x^m + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

und $D := \{x \in \mathbb{R} | q(x) \neq 0\}$ dann ist eine *rationale Funktion* $r = \frac{p}{q}$ definiert durch

$$r : D \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mit } r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

- **Was ist eine Treppenfunktion?**

Seien $a < b$ reelle Zahlen. Dann wird die Funktion

$$\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ und $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ mit $\varphi(x) = c_i$ für $x \in]t_{i-1}, t_i[$ $(1 \leq i \leq n)$ *Treppenfunktion* genannt. Die Funktionswerte $\varphi(t_i)$ in den Trennpunkten können beliebig sein.

- **Was sind rationale Operationen auf Funktionen?**

Seien $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$
2. $(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$
3. $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$
4. Sei $D' = \{x | g(x) \neq 0\}$, dann auch $\frac{f}{g} : D' \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

- **Was ist ein Berührpunkt?**

Sei $D =]a,b[$. Ein Punkt a heißt *Berührpunkt*, wenn es eine Folge von Elementen $x_n \in D$ gibt, so daß gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

Jeder Punkt $a \in D$ ist logischerweise Berührpunkt, da man die triviale Folge $x_n = a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wählen kann.

- **Welche Grenzwertbegriffe für Funktionen kennst du?**

Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ ein Berührpunkt von D.

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$

   Dies bedeutet, daß für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in D$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt:

   $$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c.$$

2. $\lim\limits_{x\nearrow a} f(x) = c$

   Dies bedeutet, daß für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in D$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ und $x_n < a$ für alle x_n gilt:

   $$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$$

3. $\lim\limits_{x\searrow a} f(x) = c$

   Dies bedeutet, daß für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in D$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ und $x_n > a$ für alle x_n gilt:

   $$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$$

- **Wann heißt eine Funktion stetig?**

Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und a ein Berührpunkt von D. f heißt im Punkt a stetig, wenn gilt:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

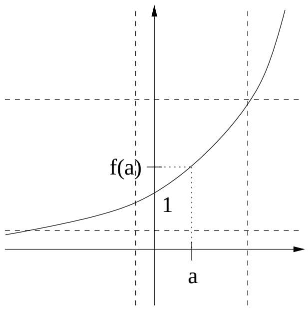
Eine Funktion heißt in ihrem Definitionsbereich stetig, wenn sie in jedem Punkt $a \in D$ stetig ist.

- **Welches andere Kriterium für Stetigkeit kennst du?**

Das ε-δ-Kriterium. Eine Funktion heißt in einem Punkt a stetig:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Umgangssprachlich kann man dies wie folgt formulieren: Zu jedem ε-Schlauch $]f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon[$ kann ich einen δ-Schlauch finden, so daß alle Elemente aus $]a-\delta, a+\delta[$ in diesem ε-Schlauch liegen. Betrachten wir die Exponentialfuktion, die, wie wir noch sehen werden, in jedem Punkt stetig ist:

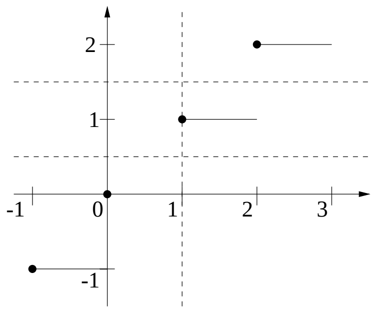


Man kann sich den Nachweis der Stetigkeit auch wie ein Spiel vorstellen:

1. Der Gegner gibt uns den Punkt der nicht stetig sein soll und ein ε vor.

2. Wir wählen einen δ-Schlauch, so daß alle Elemente des δ-Schlauchs in den ε-Schlauch abbilden.

Dies funktioniert zum Beispiel nicht bei der Funktion $f(x) = \lfloor x \rfloor$. Sie sieht wie folgt aus:



1. Unser Gegner behauptet, die Funktion sei im Punkt 1 unstetig (sie ist in jedem Punkt $a \in \mathbb{Z}$ unstetig) und gibt $\varepsilon = \frac{1}{2}$ vor.

2. Links von der 1 liegen keine Funktionswerte im Schlauch. Rechts davon zwar schon, aber der δ-Schlauch muß ja „symmetrisch“ um 1 liegen. Also liegen nur die Funktionswerte von $]1-0, 1+0[$ im Schlauch, was jedoch ein Widerspruch zur ε-δ-Bedingung ist, die $\delta > 0$ fordert. In unserem Fall ist $\delta = 0$.

- **Wie kann man neue stetige Funktionen erzeugen?**

Sind $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$, so sind auch

1. $f \pm g$

2. $\lambda \cdot f$

3. $f \cdot g$

4. $\frac{f}{g}$, wenn $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$,

stetige Funktionen. Dies ergibt sich aus den *Grenzwertsätzen für Folgen*. Wir beweisen es aber noch einmal exemplarisch für $f+g$:

f und g sind stetig, d.h. es gilt:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \text{ und } \lim_{x\to a} g(x) = g(a)$$

Also gilt doch insgesamt:

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = f(a)+g(a) = (f+g)(a)$$

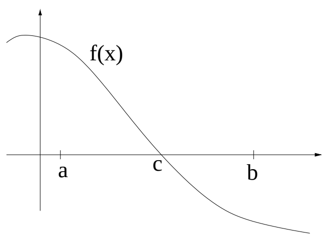
- **Zeige, daß die Komposition stetiger Funktionen wieder eine stetige Funktion ergibt!**

Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $f(D) \subseteq E$. Dann ist auch die Komposition stetig:

- **Was besagt der Nullstellensatz?**

Sei $a,b \in \mathbb{R}, a < b, I = [a,b]$ und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ (oder $f(a) < 0$, $f(b) > 0$), dann gibt es einen Punkt $c \in [a,b]$, so daß gilt:

$$f(c) = 0$$

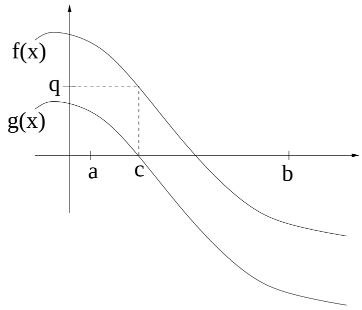


Hier gibt es zwei Beweismöglichkeiten, die jedoch beide auf das Vollständigkeitsaxiom zurückgreifen. Wir setzen $N := \{x | f(x) \leq 0\}$ und setzen weiter $c := \inf N$. Dann ist $f(x) > 0$ in einem Intervall $[a,d_1], a < d_1$ und $f(x) < 0$ in einem Intervall $[d_2,b], d_2 < b$. Angenommen es gelte $f(c) < 0$, dann ist $f(x) < 0$ in einem Intervall $[g_1,c]$, welches links von c liegt. Dann könnte c jedoch nicht das Infimum von N sein. Genauso kann man argumentieren, wenn $f(c) > 0$ wäre. Dann wäre $f(x) > 0$ in einem Intervall $[c,g_2]$. Da $f(x)$ auch links von c größer 0 wäre, könnte c wieder nicht das Infimum von N sein. Also muß $f(c) = 0$ gelten.

- **Was besagt der Zwischenwertsatz?**

Der Zwischenwertsatz ist ein Korollar zum Nullstellensatz. Er besagt, daß wenn $a,b \in \mathbb{R}, a < b, I = [a,b]$ und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt, die Funktion jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ annimmt. Sei etwa $f(a) \geq q \geq f(b)$ (siehe Zeichnung). Dann gibt es also ein $c \in [a,b]$, für das gilt:

$$f(c) = q$$



Beweis: Wir setzen $g(x) = f(x) - q$. Dann gilt weiterhin $g(a) \geq 0$ und $g(b) \leq 0$. Nach dem Nullstellensatz gibt es dann ein $c \in [a,b]$ mit $g(c) = 0$. Daraus folgt dann jedoch:

$$g(c) = f(c) - q = 0 \Rightarrow f(c) = q$$

- **Wann heißt eine Funktion beschränkt?**

Ist $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $D \neq \emptyset$, dann heißt f beschränkt, wenn $f(D)$ eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist.

- **Was besagt das Prinzip vom Maximum?**

Das Prinzip vom Maximum besagt: Ist $a, b \in \mathbb{R}, a < b, I = [a,b]$ und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, dann ist f beschränkt und $f(D) = [m, M]$, wobei $m = \inf f(D)$ und $M = \sup f(D)$. Das Bild der Funktion ist also eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$, die ein Minimum und ein Maximum besitzt. Beweis: Zuerst setzen wir:

$$A := \begin{cases} \sup f(I), \text{ falls } f(I) \text{ nach oben beschränkt ist} \\ \infty \text{ sonst} \end{cases}$$

Dann ist $A \in \overline{\mathbb{R}}$ und es gibt eine Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $y_n \in f(I)$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = A$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es zu jedem y_n ein entsprechendes x_n mit $f(x_n) = y_n$. Für diese x_n gilt: $a \leq x_n \leq b$. Die Folge der entsprechenden x_n ist also beschränkt und besitzt nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Sei p der Grenzwert dieser konvergenten Teilfolge, also $p = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = p$. Da f im Punkt p stetig ist, gilt also:

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(p).$$

Dann gilt insgesamt folgende Schlußkette:

$$A = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(p)$$

Insgesamt gilt also $A = f(p) \in f(I)$. Also ist insbesondere $A \neq \infty$ und somit $f(I)$ nach oben beschränkt. Ergebnis:

$$M = A = \sup F(I) = f(p)$$

Analog argumentiert man beim Infimum.

- **Wann heißt eine Funktion (streng) monoton steigend/fallend?**

Eine Funktion heißt

monoton wachsend $\Leftrightarrow x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

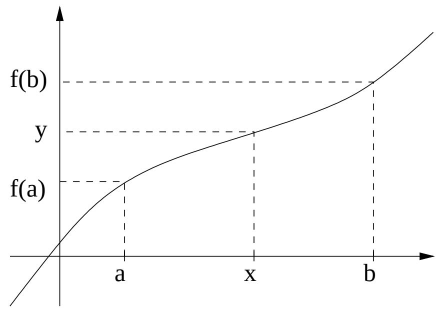
streng monoton wachsend $\Leftrightarrow x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

monoton fallend $\Leftrightarrow x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.

streng monoton fallend $\Leftrightarrow x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

• **Was besagt der Satz über die Umkehrfunktion?**
Der Satz über die Umkehrfunktion besagt: Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht-entartetes Intervall (besteht nicht nur aus einem Punkt, also $[a,a]$) und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, streng monotone Funktion, so ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : I^* \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, streng monotone Funktion. Dabei ist $I^* = f(I)$ ebenfalls ein Intervall.
Beweis: Im folgenden gehen wir davon aus, daß f monoton steigend ist. Zuerst wird gezeigt, daß I^* ein Intervall ist: Wir setzen:

$$\alpha := \begin{cases} \inf I^*, \text{ falls } I^* \text{ nach unten beschränkt} \\ -\infty \text{ sonst.} \end{cases}$$
$$\beta := \begin{cases} \sup I^*, \text{ falls } I^* \text{ nach oben beschränkt} \\ \infty \text{ sonst.} \end{cases}$$



Sei $y \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < y < \beta$. Dann gibt es $y_1, y_2 \in I^*$ mit $\alpha \leq y_1 < y < y_2 \leq \beta$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es dann $x_1, x_2 \in I$, für die gilt:

$$f(x_1) = y_1 < y < y_2 = f(x_2)$$

Dann gibt es wieder nach dem Zwischenwertsatz auch ein $x \in [x_1, x_2]$ mit $f(x) = y$. Also ist $y \in I^*$. Damit ist I^* ein Intervall.

Die Monotonie der Umkehrabbildung $g : I^* \longrightarrow \mathbb{R}$ ergibt sich aus der Äquivalenz

$$x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y).$$

Es bleibt also nur noch die Stetigkeit zu beweisen:

• **Zeige, daß eine stetige Funktion injektiv ist, genau dann wenn sie streng monoton ist.**
Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und I ein nicht entartetes Intervall. Zu zeigen ist also:

$$f \text{ injektiv} \Leftrightarrow f \text{ streng monoton}$$

Natürlich sind hier beide Richtungen zu zeigen:

„$\Leftarrow$“: Ist trivial. Wenn f streng monoton ist, gilt $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ bzw. $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$. Damit bilden verschiedene x auf verschiedene $f(x)$ ab.

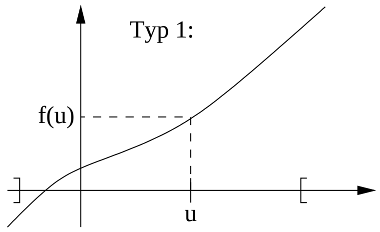
„$\Rightarrow$“: Wir gehen also davon aus, daß f injektiv ist, d.h. $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$. Wir setzen:

$$\alpha := \begin{cases} \inf I, \text{ falls } I \text{ nach unten beschränkt} \\ -\infty \text{ sonst.} \end{cases}$$
$$\beta := \begin{cases} \sup I, \text{ falls } I \text{ nach oben beschränkt} \\ \infty \text{ sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt für einen Punkt $u \in I$ entweder

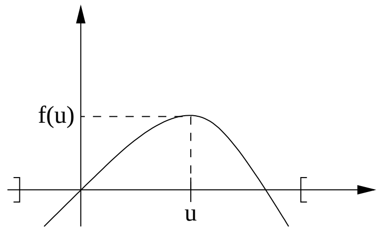
Typ 1: $f(x) < f(u)$ für alle $x < y$ und $f(x) > f(u)$ für alle $x > u$.

Typ 2: $f(x) > f(u)$ für alle $x < y$ und $f(x) < f(u)$ für alle $x > u$.



Denn für $u > \alpha$ ist $\{x|x < u\}$ ein Intervall, auf dem die stetige Funktion den Wert $f(u)$ nicht annimmt (wegen der Injektivität) und daher nach dem Zwischenwertsatz entweder nur Funktionswerte $< f(u)$ oder $> f(u)$ besitzt. Im Falle $u < \beta$ gilt dasselbe für $\{x|x > u\}$.

Desweiteren kann es nicht sein, daß $\{x \in I|x < u\}$ und $\{x \in I|x > u\}$ beide gleichzeitig nur Funktionswerte $< f(u)$ oder $> f(u)$ besitzen:



Denn dann könnte man $a, b \in I$ mit $a < u < b$ fixieren und aus dem Zwischenwertsatz würde folgen, daß die Funktion f alle Werte zwischen $[f(a), f(u)]$ bzw. $[f(b), f(u)]$ annehmen würde. Dann gäbe es zu einigen Funktionswerten Elemente, die beide auf denselben Funktionswert abbilden. Dies wäre jedoch ein Widerspruch zur Injektivität.

Also sind alle Punkte $u \in I$ entweder vom Typ 1 oder vom Typ 2 und damit streng monoton.

- **Wie ist der Logarithmus definiert?**

Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ ist stetig und streng monoton. Also existiert eine ebenfalls stetige und streng monotone Umkehrfunktion

$$\ln = \exp^{-1} : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

die *natürlicher Logarithmus* genannt wird. Für sie gilt die Funktionalgleichung:

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$$

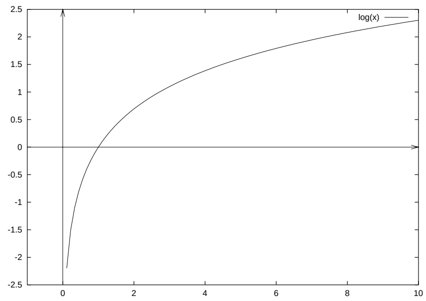
- **Beweise die Funktionalgleichung des natürlichen Logarithmus!**

Die Funktionalgleichung des natürlichen Logarithmus ergibt sich aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion:

$$\exp(\ln x + \ln y) = \exp(\ln x) \cdot \exp(\ln y) = x \cdot y$$

Wenn man diese Gleichung noch einmal logarithmiert, ergibt sich:

$$\ln x + \ln y = \ln(x \cdot y)$$



- **Wie sind allgemeine Potenzen definiert?**

Die allgemeine Potenz zur Basis a ist wie folgt definiert:

$$a^r = e^{r \cdot \ln a} \text{ für } a \in \mathbb{R}_+^*, r \in \mathbb{Q}$$

- **Beweise die Formel für die allgemeine Potenzen!**

Dies geht über einen Induktonsbeweis nach r (zuerst nur $r \in \mathbb{N}$):

Induktionsanfang: Für $r = 0$ gilt: $a^0 = 1 = e^0 = e^{0 \cdot \ln a}$.

Induktionsannahme: Für $r \in \mathbb{N}$ gelte $a^r = e^{r \cdot \ln a}$.

Induktionsschluß: Dann gilt wegen $a \in \mathbb{R}_+^*$:

$$a^{r+1} = a^r \cdot a = e^{r \cdot \ln a} \cdot e^{\ln a} = e^{r \cdot \ln a + a} = e^{(r+1) \cdot \ln a}$$

Damit haben wir die Gleichung für $r \in \mathbb{N}$ bewiesen. Jetzt weiten wir den Beweis auf die ganzen Zahlen aus. Es sei $-r \in \mathbb{N}$, also $r \in \mathbb{Z}, r \leq 0$. Dann gilt:

$$a^r = (a^{-1})^{-r} = e^{-r \cdot \ln a^{-1}}$$

Betrachten wir $\ln a^{-1}$. Aus der Funktionalgleichung folgt:

$$\ln a + \ln a^{-1} = \ln(a \cdot a^{-1}) = \ln 1 = 0$$

Also ist doch $\ln a^{-1}$ das inverse Element bezüglich der Addition von $\ln a$. Damit $\ln a^{-1} = -\ln a$. Dieses Ergebnis setzen wir oben ein:

$$a^r = (a^{-1})^{-r} = e^{-r \cdot \ln a^{-1}} = e^{-r \cdot (-\ln a)} = e^{r \cdot \ln a}$$

6 Differenzierbarkeit

- **Wann heißt eine Funktion in einem Punkt diffenzierbar?**

Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$ heißt in einem Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar, wenn der

$$\lim_{x \to x_0, x \in D \setminus \{x_0\}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} := f'(x_0)$$

existiert. Der Grenzwert $f'(x_0)$ heißt *Differentialquotient* oder die *Ableitung* von f im Punkt x_0. Eine Funktion ist differenzierbar in D, wenn sie in jedem Punkt $x \in D$ differenzierbar ist.

In dieser Definition können wir auch $h = x - x_0$ setzen und erhalten dann:

$$f'(x_0) := \lim_{h \to 0, x_0 + h \in D \setminus \{x_0\}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

- **Was ist die Differenzenquotientenfunktion?**

Die Differenzenquotientenfunktion einer Funktion f an der Stelle x_0 ist definiert als:

$$g : D \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mit } g(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Daß eine Funktion in einem Punkt x_0 diffenzierbar ist, ist dann gleichbedeutend damit, daß man die Funktion g, die an der Stelle x_0 nicht definiert ist, zu einer stetigen Funktion $\tilde{g}$ ergänzen kann und zwar durch:

$$\tilde{g}(x) := \begin{cases} g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ für } x \neq x_0 \\ f'(x_0) \text{ für } x = x_0 \end{cases}$$

- **Welche Differentiationsregeln kennst du?**

1. Summenregel
2. Produktregel
3. Kettenregel
4. Quotientenregel
5. Umkehrregel

- **Was besagt die Summenregel? Beweis?**

Die Summenregel besagt:

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Wir benutzen die Definition der Differentiation:

$$\begin{aligned}
& \lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} \\
= & \lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} \\
= & \lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
= & f'(x)+g'(x)
\end{aligned}$$

- **Was besagt die Produktregel? Beweis?**

Die Produktregel lautet:

$$(f\cdot g)'(x) = f(x)g'(x)+f'(x)g(x)$$

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und $x_n \in D\backslash\{x\}$ für alle $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty} \frac{(f\cdot g)(x_n)-(f\cdot g)(x)}{x_n-x} \\
= & \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)g(x_n)-f(x)g(x)}{x_n-x} \\
= & \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)g(x_n)-f(x_n)g(x)+f(x_n)g(x)-f(x)g(x)}{x_n-x} \\
= & \lim_{n\to\infty} f(x_n)\frac{g(x_n)-g(x)}{x_n-x} + \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}g(x) \\
= & f(x)g'(x)+f'(x)g(x)
\end{aligned}$$

Speziell mit $g(x)=\lambda$ folgt $(\lambda\cdot f)'(x)=\lambda\cdot f'(x)$.

- **Was besagt die Kettenregel? Beweis?**

Es sei $D,E\subseteq\mathbb{R}$ mit $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$ und $g:E\longrightarrow\mathbb{R}$. Desweiteren gelte $f(D)\subseteq E$. Ist f in $x\in D$ differenzierbar und g in $y=f(x)\in E$, dann ist die Komposition $(g\circ f):D\longrightarrow\mathbb{R}$ in x differenzierbar und es gilt:

$$(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\,f'(x)$$

Dieser Satz dürfte aus der Schule als „innere Ableitung mal äußere Ableitung" bekannt sein. Beispiel:

$$f(x)=e^{x^2} \text{ und } f'(x)=2x\cdot e^{x^2} \text{ oder } g(x)=(e^x)^2 \text{ und } g'(x)=e^x\cdot 2e^x = 2e^{2x}$$

Beweis: Wir definieren uns eine „neue" Funktion, mit deren Hilfe wir die alte nachher darstellen:

$$g_1(z) = \begin{cases} \frac{g(z)-g(y)}{z-y} \text{ für } z\neq y \\ g'(y) \text{ für } z=y \end{cases}$$

Aufgrund der Differenzierbarkeit von g in y ist diese Funktion dann auch stetig, denn:

$$\lim_{z\to y, z\in E\backslash\{y\}} g_1(z) = g'(y) = g_1(y)$$

Stellen wir die obere Gleichung für g_1 um, folgt:

$$g(z)-g(y)=g_1(z)(z-y)$$

Betrachten wir nun

$$\begin{aligned}
& \lim_{u\to x, u\in D\setminus\{x\}} \frac{g(f(u))-g(f(x))}{u-x} \\
= & \lim_{u\to x, u\in D\setminus\{x\}} \frac{g_1(f(u))(f(u)-f(x))}{u-x} \\
= & \lim_{u\to x, u\in D\setminus\{x\}} g_1(f(u)) \cdot \lim_{u\to x, u\in D\setminus\{x\}} \frac{f(u)-f(x)}{u-x} \\
= & \; g_1(f(x))\cdot f'(x) \\
= & \; g'(f(x))f'(x)
\end{aligned}$$

Letzteres gilt wegen $f(x)=y$ und $g_1(y)=g'(y)$.

- **Was besagt die Quotientenregel?**

Sei $D\subseteq\mathbb{R}$ und $f,g: D\longrightarrow\mathbb{R}$ in x differenzierbar mit $g(u)\neq 0$ für alle $u\in D$. Dann ist auch die Funktion $\frac{f}{g}: D\longrightarrow\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Beweis: Zuerst drücken wir $\left(\frac{1}{g}\right)(x)$ durch eine Kettenregel aus: $h:\mathbb{R}^*\longrightarrow\mathbb{R}$ mit $h(y)=\frac{1}{y}$ ist in jedem Punkt $y\in D$ differenzierbar und es gilt: $h'(y)=-\frac{1}{y^2}$. Dann ist $\left(\frac{1}{g}\right)$ ausdrückbar als $(h\circ g)(x)$. Nach der Kettenregel gilt:

$$(h\circ g)'(x)=h'(g(x))g'(x)=-\frac{1}{g^2(x)}\cdot g'(x)=-\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

$\left(\frac{f}{g}\right)'$ drücken wir nun mit der Produktregel aus:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)' &= f'(x)\left(\frac{1}{g}\right)(x)+f(x)\left(\frac{1}{g}\right)'(x) \\
&= \frac{f'(x)}{g(x)}-\frac{f(x)g'(x)}{g^2(x)}=\frac{f'x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}
\end{aligned}$$

- **Was besagt die Umkehrregel? Beweis?**

Ist $f: I\longrightarrow\mathbb{R}$ eine streng monotone, stetige Funktion, so existert die Umkehrfunktion $f^{-1}: I^*\longrightarrow\mathbb{R}$ mit $I^*=f(I)$. Ist f im Punkt x differenzierbar und ist $f'(x)\neq 0$, dann ist auch f^{-1} im Punkt $y=f(x)$ differenzierbar und es gilt:

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

- **Wann heißt eine Funktion k-mal (stetig) differenzierbar?**

Sei $D\subseteq\mathbb{R}$ und $f: D\longrightarrow\mathbb{R}$ mit $x\in\mathbb{R}$.

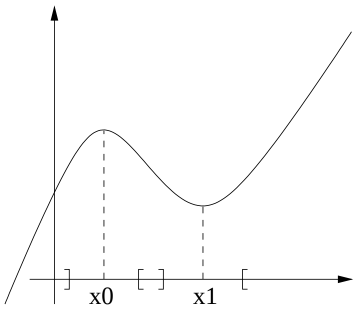
1. Wir setzen $f^{(0)}(x) = f(x)$.

2. Sei $k \in \mathbb{N}$. Gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß die Funktion $f^{(k-1)} : D \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ definiert und in x differenzierbar ist, so setzen wir $f^{(k)}(x) := (f^{(k-1)})'(x)$ und nennen $f^{(k)}$ die *k-te Ableitung* von f in x. In diesem Fall ist f k-mal differenzierbar in x. Ist f k-mal differenzierbar und $f^{(k)} : D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann nennen wir f in D k-mal stetig differenzierbar.

- **Was ist ein lokales Extremum? Was gilt an Extrema?**

Seien $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ und $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann hat f in $x_0 \in]a, b[$ ein lokales Maximum (Minimum), wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$) ist, für alle $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$. Gilt das Gleichheitszeichen nur für $x = x_0$, dann heißt x_0 ein *strenges* bzw. *isoliertes* Maximum (Minimum).

Ist x_0 ein lokales Maximum bzw. Minimum, so heißt x_0 ein lokales Extremum.



In der Grafik stellt x_0 ein lokales Maximum und x_1 ein lokales Minimum dar. Für beide sind ε-Umgebungen eingezeichnet, die die oben genannte Bedingung für Extrema erfüllen.

Besitzt eine Funktion $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}, a < b, a, b \in \mathbb{R}$ ein Extremum x_0 und ist in diesem differenzierbar, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

Beweis: Wir zeigen die Aussage für ein lokales Maximum: x_0 ist ein lokales Maximum, also gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß für alle $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ $f(x) \leq f(x_0)$. Wir betrachten nun zwei Folgen, die sich dem Maximum x_0 einmal von links und einmal von rechts nähern:

1. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ und $x_n < x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt doch:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \geq 0$$

Dies folgt aus $f(x_n) - f(x_0) \leq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_n - x_0 \leq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ und $x_n > x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt entsprechend:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \leq 0$$

Dies folgt aus $f(x_n) - f(x_0) \leq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_n - x_0 \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

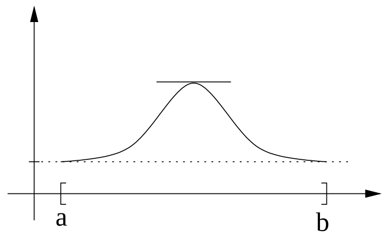
Da die Funktion f in x_0 differenzierbar ist, folgt die Gleichheit der Grenzwerte und damit $f'(x_0) = 0$.
Es ist jedoch anzumerken, daß *nicht* gilt:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow f \text{ besitzt ein Extremum bei } x$$

Ein Gegenbeispiel ist $f(x) = x^3$. Es gilt $f(0) = f'(0) = 0$ jedoch ist 0 kein Extremum!

- **Was besagt der Satz von Rolle und warum ist er so wichtig?**

Sei $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) = f(b)$. Weiter sei f im Intervall $]a, b[$ differenzierbar. Dann gibt es ein $x_0 \in]a, b[$ mit $f'(x_0) = 0$. Anschaulich sieht dies wie folgt aus:



<u>Beweis:</u> Wir haben zwei Fälle zu unterscheiden:

1. f ist eine konstante Funktion. Dann gilt $\forall x \in]a, b[: f(x) = f(a) = f(b)$. Und damit auch $f'(x) = 0$ für alle $x \in]a, b[$.

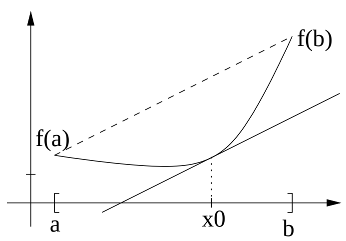
2. Es gibt ein $x_1 \in]a, b[$ mit $f(x_1) > f(a)$ bzw. $f(x_1) < f(a)$. Damit ist das nach dem Prinzip vom Maximum existierende Maximum bzw. Minimum x_0 also von a, b verschieden und liegt in $]a, b[$. Es gilt nach obigen Satz über Extrema $f'(x_0) = 0$.

Der Satz von Rolle ist so wichtig, weil er gebraucht wird, um den folgenden Satz (Mittelwertsatz) zu beweisen.

- **Was besagt der Mittelwertsatz?**

Sei $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die in jedem $x \in]a, b[$ differenzierbar ist. Dann gibt es ein $x_0 \in]a, b[$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Zu der Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ gibt es also eine parallele Tangente, die die Steigung im Punkt x_0 ist.

<u>Beweis:</u> Wir konstruieren uns eine Hilfsfunktion $F:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, auf die wir den *Satz von Rolle* anwenden können, so daß die Behauptung folgt. Es sei

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a).$$

Zunächst einmal gilt $F(a)=F(b)=f(a)$, denn:

$$\begin{aligned} F(a) &= f(a)-\tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(a-a)=f(a)-\tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot 0=f(a)\\ F(b) &= f(b)-\tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(b-a)=f(b)-f(b)+f(a)=f(a)\end{aligned}$$

Also gibt es ein $x_0\in]a,b[$ mit $F'(x_0)=0$. Die Ableitung von $F(x)$ ist:

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Denn man kann $F(x)$ auch schreiben als:

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot x+\underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot a}_{const.}$$

Da es ein $x_0\in]a,b[$ gibt mit $F'(x_0)=0$ folgt:

$$0=f'(x_0)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Leftrightarrow f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

- **Was besagt der erweiterte Mittelwertsatz?**

Sei $a,b\in\mathbb{R}, a<b$ und $f,g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ stetige Funktionen, die in $[a,b]$ differenzierbar sind. Es gelte $g'(x)\neq 0$ für alle $x\in[a,b]$. Dann gibt es ein $x_0\in[a,b]$, so daß gilt:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

<u>Beweis:</u> Auch hier konstruieren wir uns wieder eine Hilfsfunktion. Jedoch ist es wichtig, daß $g(b)\neq g(a)$ ist, damit die Hilfsfunktion funktioniert. Dies ist jedoch der Fall, da $g'(x)\neq 0$ für alle $x\in[a,b]$. Denn wäre $g(a)=g(b)$ gäbe es nach dem Mittelwertsatz ein $x_0\in[a,b]$, so daß

$$g'(x_0)=\frac{g(b)-g(a)}{b-a}=\frac{g(b)-g(b)}{b-a}=\frac{0}{b-a}=0.$$

Dies ist jedoch durch die Bedingung ausgeschlossen. Wir betrachten die Funktion

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot(g(x)-g(a)).$$

Diese Funktion ist stetig und differenzierbar in $[a,b]$. Desweiteren gilt auch hier $F(a)=F(b)=f(a)$. Also können wir auch hier wieder den *Satz von Rolle* anwenden, d.h. es gibt ein $x_0\in[a,b]$, so daß $F'(x_0)=0$. Die Ableitung von $F(x)$ ist:

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(x)$$

Also für $F'(x_0) = 0$: $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. Dies ist jedoch die Behauptung.

• **Zeige, daß eine Funktion konstant ist, wenn die Ableitung in allen x des Definitionsbereich Null ist.**

Wir zeigen also: Sei $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in $[a, b]$ mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$, dann ist $f(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Dazu müssen wir erst einen anderen Satz beweisen. Gibt es $m, M \in \mathbb{R}$ mit $m \leq f'(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$, dann gilt die Abschätzung:

$$m(y-x) \leq f(y) - f(x) \leq M(y-x) \text{ für alle } x, y \in [a, b] \text{ mit } x \leq y$$

Beweis: Wir wenden für $x \neq y$ (dieser Fall ist trival) den Mittelwertsatz an auf das Intervall $[x, y]$. Dann gilt doch:

$$m \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq M$$

Denn man kann ja die einzelnen $f'(x)$ so abschätzen. Da $y - x > 0$ ist können wir auch ruhig in der Ungleichung damit multiplizieren:

$$m(y-x) \leq f(y) - f(x) \leq M(y-x)$$

In unserem Fall ist $m = M = 0$ eine untere bzw. obere Schranke für die Steigung, also folgt:

$$0(y-x) \leq f(y) - f(x) \leq 0(y-x)$$

Und damit $f(x) = f(y)$ für alle $x \in [a, b]$, d.h. $f(x)$ ist konstant.

• **Was kann man mit Hilfe der ersten Ableitung über das Monotonieverhalten einer Funktion aussagen?**

Wie immer sei $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in $[a, b]$. Dann gilt:

1. $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in]a, b[\Leftrightarrow f$ ist monoton wachsend.
2. $f'(x) > 0$ für alle $x \in]a, b[\Rightarrow f$ ist streng monoton wachsend.
3. $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in]a, b[\Leftrightarrow f$ ist monoton fallend.
4. $f'(x) < 0$ für alle $x \in]a, b[\Rightarrow f$ ist streng monoton fallend.

Man beachte, daß hier in einigen Fällen „$\Leftrightarrow$“ und in einigen nur „$\Rightarrow$“ steht! Zum Beispiel ist $f(x) = x^3$ streng monoton steigend, jedoch gilt $f'(0) = 0$. Also gilt nur die eine Richtung bei strenger Monotonie.

Beweis:

„$\Rightarrow$“: Wir zeigen hier nur $f'(x) > 0$, die anderen Fälle gehen analog. Wir betrachten $y, z \in [a, b]$ mit $y < z$. Dann können wir den Mittelwertsatz auf $[y, z]$ anwenden, d.h. es gibt ein $x_0 \in [y, z] \subseteq [a, b]$ mit

$$\frac{f(z) - f(y)}{z - y} = f'(x_0) > 0$$

Dann ist wegen $z - y > 0$ auch $f(z) - f(y) > 0$ also $f(y) < f(z)$.

„$\Leftarrow$": Wir behandeln nur den Fall, daß f monoton wachsend ist. Für alle $x, y \in [a,b]$ mit $x \neq y$ gilt dann $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \geq 0$ und damit auch

$$\lim_{x \to y, x \in [a,b] \setminus \{y\}} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \geq 0.$$

Also $f'(y) \geq 0$ für alle $y \in [a,b]$.

- **Wann besitzt eine Funktion ein lokales Extremum?**

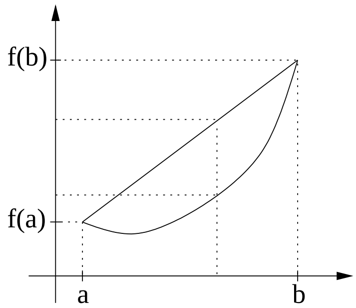
Sei $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und in jedem $x \in]a,b[$ differenzierbar. Im Punkt x_0 sei f zweimal differenzierbar. Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ ($f''(x_0) > 0$), so besitzt f an der Stelle x_0 ein *streng* lokales Maximum (Minimum).

- **Wann heißt eine Funktion konvex (konkav)?**

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. f heißt konvex, wenn gilt:

$$\forall a, b \in I \wedge \forall \lambda \in [0,1] : f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

Eine Funktion f heißt konkav, wenn $-f$ konvex ist. Anschaulich bedeutet die Gleichung, daß sich alle Funktionswerte im Intervall $[a,b]$ unterhalb der Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ befinden:



Dabei ist $\lambda a + (1-\lambda)b$ mit $\lambda \in [0,1]$ ein Punkt im Intervall $[a,b]$, denn für $\lambda = 0$ erhält man b und für $\lambda = 1$ erhält man a. Also ist $f(\lambda a + (1-\lambda)b)$ ein Funktionswert aus dem Intervall $[a,b]$. Und $\lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$ ist die Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$.

- **Welches andere Kriterium für Konvexität gibt es?**

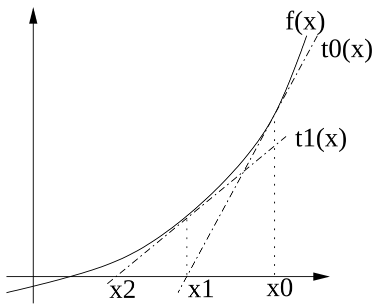
Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion. Dann gilt:

$$f \text{ ist konvex } \Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in I$$

So ist zum Beispiel die Funktion $f(x) = e^x$ konvex, da $f''(x) = e^x$ im ganzen Definitionsbereich positiv ist. Ebenso ist $f(x) = x^2$ konvex, da $f''(x) = 2$ ist. Die Funktion $f(x) = x^3$ hingegen ist im Bereich $]-\infty, 0]$ konkav und im Bereich $[0, \infty[$ konvex, da $f''(x) = 6x$.

- **Was ist das Newton-Verfahren und wie funktioniert es?**

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Gesucht ist eine Nullstelle von f in D. Die Idee des Newton-Verfahrens ist es, die Funktion in einem Punkt $x_0 \in D$ durch die Tangente $t_0(x)$ im Funktionswert dieses Punktes anzunähern und die Nullstelle dieser Tangente als neuen Punkt zur Annäherung zu nehmen:



Die Tangente $t_0(x)$ im Punkt x_0 ist $t_0(x) = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$. Gesucht ist die Nullstelle dieser Tangente, also das x für welches $t_0(x) = 0$ gilt. Dies findet man durch umstellen:

$$\begin{aligned} f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) &= 0 \\ f'(x_0)\cdot x - f'(x_0)\cdot x_0 + f(x_0) &= 0 \\ f'(x_0)\cdot x &= f'(x_0)\cdot x_0 - f(x_0) \\ x &= \frac{f'(x_0)\cdot x_0}{f'(x_0)} - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ x &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \end{aligned}$$

Es gilt also allgemein

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Wenn alle x_n definiert sind und die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $p \in D$ konvergiert und wenn f in D stetig differenzierbar ist mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, dann folgt:

$$p = p - \frac{f(p)}{f'(p)}$$

Dies ist jedoch gleichbedeutend mit $f(p) = 0$. Also ist p eine Nullstelle von f. Jedoch muß die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergieren bzw. die einzelnen x_n müssen schon garnicht definiert sein.

• **In welchem Fall konvergiert das Newton-Verfahren? Zeige dies!**
Sei $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine in $[a,b]$ zweimal differenzierbare konvexe Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann gilt:

1. Es gibt genau eine Nullstelle $p \in [a,b]$ mit $f(p) = 0$.
2. Ist $x_0 \in [a,b]$ ein Punkt mit $f(x_0) \geq 0$ so ist die durch $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ definierte Folge für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert, monoton fallend und konvergent.

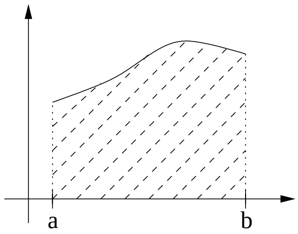
<u>Beweis:</u> Wir zeigen beide Punkte:

1. f ist konvex, also gilt $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in]a,b[$. Also ist f' auf $[a,b]$ monoton wachsend. Da f differenzierbar und damit auch in jedem Punkt des Definitionsbereich stetig ist, gibt es nach dem Prinzip vom Maximum ein $q \in [a,b]$ mit $f(q) = \inf\{f(x) | x \in [a,b]\}$. Desweiteren ist $f(q) < 0$ wegen $f(a) < 0$, denn sonst wäre $f(q)$ nicht das Infimum.

7 Integration

- **Wie ist die Integralrechnung motiviert?**

Sei $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ stetig. Dann soll $\int_a^b f(x)dx$ der Inhalt der Fläche zwischen der Funktion und der x-Achse sein:



Bei einfach gebauten Funktionen ist dann noch klar, wie man das Integral berechnet. Ist z.B. $f(x) = c$, so gilt $\int_a^b f(x)dx = c \cdot (b - a)$.

Auch bei Treppenfunktionen kann man das Integral noch leicht berechnen. Es gelte $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ und $f(x) = c_i$ für $x \in]t_i, t_{i-1}[$. Dann ist das Integral definiert als:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot (t_i - t_{i-1})$$

Man nennt das $(n+1)$-Tupel $(t_0, \ldots, t_n)$ auch eine *Partition* oder *Unterteilung* des Intervalls $[a, b]$.

- **Zeige, daß das Integral einer Treppenfunktion nicht von der Partition abhängt!**

Es sei $\varphi \in T[a, b]$ mit zwei verschiedenen Unterteilungen

$$\begin{array}{rl} Z: & a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \\ Z': & a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b \end{array}$$

mit

$$\varphi(x) = c_i \text{ für } x \in]x_{-1}, x_i[\text{ bzw. } \varphi(x) = c'_j \text{ für } x \in]t_{i-1}, t_i[$$

Zur Abkürzung setzen wir:

$$\int_Z \varphi = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \text{ bzw. } \int_{Z'} \varphi = \sum_{j=1}^{m} c'_j \cdot (t_j - t_{j-1})$$

Zu zeigen ist also $\int_Z \varphi = \int_{Z'} \varphi$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall: Jeder Teilpunkt von Z ist auch Teilpunkt von Z'. Etwa $x_i = t_{k_i}$. Dann gilt

$$x_{i-1} = t_{k_{i-1}} < t_{k_{i-1}+1} < \cdots < t_{k_i} = x_i$$

und

$$c'_j = c_i \text{ für } k_{i-1} < j \leq k_i$$

Daraus folgt:

$$\int_{Z'} \varphi = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=k_{i-1}}^{k_i} c_i \cdot (t_j - t_{j-1}) = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \int_{Z} \varphi$$

2. Fall: Z und Z' seien beliebig und Z^* sei die Partition die alle Teilpunkte von Z und Z' enthält. Dann gilt nach 1:

$$\int_{Z} \varphi = \int_{Z^*} \varphi = \int_{Z'} \varphi$$

- **Zeige, daß die Menge der Treppenfunktionen einen Untervektorraum des Vektorraumes aller reeller Funktionen bildet!**

Zu zeigen ist also: Sei $T[a,b]$ die Menge aller Treppenfunktionen in $[a,b]$ mit $a,b \in \mathbb{R}, a < b$. Dann gilt:

1. $0 \in T[a,b]$, wobei $0 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $0(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$
2. $f, g \in T[a,b] \Rightarrow f+g \in T[a,b]$
3. $f \in T[a,b], \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot f \in T[a,b]$

Beweis:

1. Ist klar.
2. Nur hier ist was zu zeigen. Wir haben zwei Funktionen mit zwei Partitionen. Zu f gibt es eine Partition $a = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = b$ und zu g gibt es eine Partition $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ und die beiden Funktionen sind jeweils konstant auf den Teilintervallen. Nun betrachten wir die Partition $a = u_0 < u_1 < \cdots < u_k = b$, wobei gilt:

$$\{u_0, u_1, \ldots, u_k\} = \{s_0, s_1, \ldots, s_m\} \cup \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$$

   Sowohl f als auch g sind auf den Teilintervallen $]u_i, u_{i-1}[$ für $i \in \{1, \ldots, k\}$ konstant, also ist auch $f+g$ auf diesen Teilintervallen konstant. Also $f+g \in T[a,b]$.
3. Ist klar.

- **Zeige, daß das Integral ein lineares Funktional auf dem Vektorraus aller Treppenfunktionen ist. Zeige, daß dieses Funktional monoton ist!**

Zu zeigen ist also: Seien $f, g \in T[a,b]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1. $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$
2. $\int_a^b (\lambda \cdot f)(x)dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)dx.$
3. $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Dabei gilt $f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in [a,b]: f(x) \leq g(x)$.
Beweis: Wir können für beide Funktionen jeweils eine Partition $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ finden, die alle Teilpunkte von f und g enthält. Dann folgt:

1.
$$\begin{aligned}\int_a^b (f+g)(x)dx &= \sum_{i=1}^n (c_i + d_i)\cdot(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i \cdot (t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^n d_i \cdot (t_i - t_{i-1}) \\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\end{aligned}$$

2. $\int_a^b \lambda f(x)dx = \sum_{i=1}^n (\lambda \cdot c_i)\cdot(t_i - t_{i-1}) = \lambda \cdot \sum_{i=1}^n c_i \cdot (t_i - t_{i-1}) = \lambda \cdot \int_a^b f(x)dx$

3. Ist einfach logisch.

- **Wie ist das Oberintegral bzw. Unterintegral definiert?**

Es sei $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann definieren wir das

Oberintegral als $\int_a^{b*} f(x)dx := \inf\{\int_a^b \varphi(x)dx | \varphi \in T[a,b] \text{ und } f \leq \varphi\}$ und das

Unterintegral als $\int_{a*}^b f(x)dx := \sup\{\int_a^b \varphi(x)dx | \varphi \in T[a,b] \text{ und } f \geq \varphi\}$.

- **Wann heißt eine beschränkte Funktion Riemann-integrierbar?**

Sei $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine beschränkte Funktion. Dann ist f *(Riemann-)integrierbar*, wenn gilt:

$$\int_a^{b*} f(x)dx = \int_{a*}^b f(x)dx$$

In diesem Fall setzen wir

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{b*} f(x)dx = \int_{a*}^b f(x)dx$$

und nennen es das *Integral* von f über $[a,b]$.

Zum Beispiel ist jede Treppenfunktion integrierbar, da die Treppenfunktion selbst das Infimum und Supremum der Menge aller Treppenfunktionen ist, die kleiner gleich bzw. größer gleich der Treppenfunktion sind. Ein Beispiel für eine nicht integrierbare Funktion ist die *Dirichlet'sche Sprungfunktion*, da hier die Ober- und Unterintegrale nicht übereinstimmen.

- **Zeige, daß der folgende Satz gilt:**

Es sei $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt: f ist integrierbar genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $\varphi, \psi \in T[a,b]$ existieren mit $\varphi \leq f \leq \psi$ und $\int_a^b \psi - \int_a^b \varphi \leq \varepsilon$.
Beweis:

„⇒“: Es gibt $\varphi, \psi \in T[a,b]$ mit $\varphi \le f \le \psi$ und

$$\int_a^{b*} f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx \le \int_a^{b*} f(x)dx + \tfrac{\varepsilon}{2}$$
$$\int_{a\,*}^{b} f(x)dx \ge \int_a^b \psi(x)dx \ge \int_{a\,*}^{b} f(x)dx - \tfrac{\varepsilon}{2}$$

Es gilt $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{b*} f(x)dx = \int_{a\,*}^b f(x)dx$, da die Funktion integrierbar ist. Desweiteren gilt:

$$\int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^b \psi(x)dx \le \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} - \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

„⇐“: Gibt es Treppenfunktionen $\varphi, \psi \in T[a,b]$ mit $\varphi \le f \le \psi$ und

$$\int_a^b \psi(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx \le \varepsilon$$

so folgt:

$$\int_a^{b*} f(x)dx - \int_{a\,*}^b f(x)dx \le \int \psi(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx \le \varepsilon$$

Dann ist f integrierbar, da dies für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, d.h. der Abstand zwischen Oberintegral und Unterintegral wird beliebig klein.

- **Welche integrierbaren Funktionsklassen kennst du?**

Alle stetigen Funktionen $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sind integrierbar, ebenso wie alle monotonen Funktionen $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

- **Wie lautet der Mittelwertsatz der Integralrechnung?**

Es sei $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und $f, \varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen, wobei $\varphi > 0$. Dann gibt es ein $\xi \in [a,b]$, so daß gilt:

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\xi) \cdot \int_a^b \varphi(x)dx$$

<u>Beweis:</u> f ist stetig, also gibt es

$$m = \inf\{f(x) | x \in [a,b]\}$$
$$M = \sup\{f(x) | x \in [a,b]\}$$

Desweiteren gilt die Abschätzung:

$$m \cdot \varphi(x) \le f(x) \cdot \varphi(x) \le M \cdot \varphi(x)$$

Also gilt auch:

$$\int_a^b m \cdot \varphi(x) dx \leq \int_a^b f(x) \cdot \varphi(x) dx \leq \int_a^b M \cdot \varphi(x) dx$$

Dies ist gleichbedeutend mit:

$$m \cdot \int_a^b \varphi(x) dx \leq \int_a^b f(x) \cdot \varphi(x) dx \leq M \cdot \int_a^b \varphi(x) dx$$

Da $\int_a^b \varphi(x) dx \geq 0$ ist, können wir weiter umstellen:

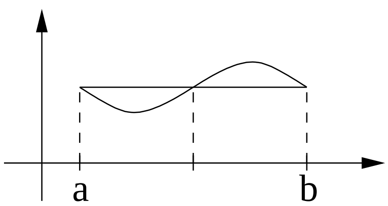
$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)\varphi(x) dx}{\int_a^b \varphi(x) dx} \leq M$$

m und M sind Funktionswerte von f, daher existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)\varphi(x)dx}{\int_a^b \varphi(x)dx}$. Wenn man dies wieder umstellt, ergibt sich daher die Behauptung:

$$f(\xi) \int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b f(x)\varphi(x) dx$$

Speziell der Fall $\varphi(x) = 1$ ist interessant, denn dann ergibt sich:

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi) \cdot \int_a^b 1 dx = f(\xi) \cdot (b-a)$$



Es gibt also einen Punkt $f(\xi)$, durch den man eine Gerade ziehen kann, so daß die Funktion $f(x)$ mit der Geraden eine Fläche einschließt. Der Flächeninhalt der Flächen oberhalb dieser Geraden ist dann gleich dem Flächeninhalt der Flächen unterhalb dieser Geraden. Dieser Fall wird auch noch wichtig, um zu zeigen, daß es ein $F(x) = \int_a^x f(x) dx$ gibt mit $F'(x) = f(x)$.

8 Differentation und Integration

- **Was ist ein unbestimmtes Integral?**

Bis jetzt haben wir immer nur bestimmte Integrale $\int_a^b f(x)dx$ über ein Intervall $[a,b]$ ausgerechnet. Wir können jedoch auch eine Integrationsgrenze variabel lassen und so eine Funktion $F:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ definieren. Es sei $I\subseteq\mathbb{R}$ und $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ stetig mit $a,x\in\mathbb{R}$. Dann definieren wir:

$$F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$$

Man kann zeigen, daß für diese Funktion $F'(x)=f(x)$ gilt. Dazu bilden wir den Differntialquotienten:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0, h\neq 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0,h\neq 0}\frac{1}{h}\left(F(x+h)-F(x)\right) \\ &= \lim_{h\to 0,h\neq 0}\frac{1}{h}\left(\int\limits_a^{x+h} f(x)dx-\int\limits_a^{x} f(x)dx\right)=\lim_{h\to 0,h\neq 0}\frac{1}{h}\left(\int\limits_x^{x+h} f(x)dx\right)\end{aligned}$$

Betrachten wir $\int_x^{x+h} f(x)dx$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $\xi_h\in[x,x+h]$ (bzw. $[x+h,x]$ wenn h negativ ist), so daß gilt:

$$\int\limits_x^{x+h} f(x)dx=f(\xi_h)\cdot\int\limits_x^{x+h}1dx=f(\xi_h)\cdot(x+h-x)=f(\xi_h)\cdot h$$

Wir betrachten also weiter:

$$\lim_{h\to 0,h\neq 0}\frac{1}{h}\cdot h\cdot f(\xi_h)=\lim_{h\to 0,h\neq 0}f(\xi_h)$$

Da $\xi_h\in[x,x+h]$ gilt und h gegen 0 strebt, strebt ξ_h also gegen x. Da f stetig ist gilt dann:

$$\lim_{h\to 0,h\neq 0}f(\xi_h)=f(x)$$

- **Was ist eine Stammfunktion?**

Es sei $I\subseteq\mathbb{R}$ und $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$. Eine Funktion $F:I\longrightarrow\mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* von f wenn gilt:

$$F'(x)=f(x)$$

- **Zeige, daß sich Stammfunktionen nur um eine Konstante unterscheiden!**

Zu zeigen ist also: Sei $I\subseteq\mathbb{R}$ und $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$. $F:I\longrightarrow\mathbb{R}$ sei eine Stammfunktion von f. Dann gilt:

$$G \text{ ist eine Stammfunktion von } f\Leftrightarrow F-G=c \text{ mit } c\in\mathbb{R}$$

„⇒“: Sei G eine Stammfunktion. Also $G' = f = F'$. Dann gilt $(F-G)' = F' - G' = f - f = 0$. Demnach ist die Ableitung von $(F-G)$ für jedes $x \in I$ gleich 0. Daraus folgt, daß $F - G$ konstant sein muß.

„⇐“: Es gelte $F - G = c$. Dies kann man umformen zu $G = F - c$. Dann ist jedoch $G' = F' = f$. Also ist G eine Stammfunktion zu f.

- **Was besagt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung?**

Dieser Satz wird auch *Fundamentalsatz* der Differential- und Integralrechnung genannt. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Ist F eine Stammfunktion von f so gilt für alle $a, b \in I$:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) := F(x)|_a^b$$

Es sei F_0 eine weitere Stammfunktion von f. Dann gilt:

$$F_0(x) = \int_a^x f(x)dx$$

Wie man sieht ist $F_0(b) = \int_a^b f(x)dx$ und $F_0(a) = \int_a^a f(x)dx = 0$. F und F_0 unterscheiden sich dann nur um eine Konstante, daher gilt:

$$F(b) - F(a) = F_0(b) - F_0(a) = F_0(b) - 0 = F_0(b) = \int_a^b f(x)dx$$

- **Wie funktioniert die Substitutionsregel?**

Die Substitutionsregel macht Gebrauch von der Kettenregel der Differentation. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Desweiteren sei $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $\varphi([a,b]) \subseteq I$. Dann gilt:

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$

<u>Beweis:</u> Sei $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Dann ist $(F \circ \varphi)$ definiert und es gilt nach der Kettenregel für $t \in [a,b]$:

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

Also ist $(F \circ \varphi)(t) = F(\varphi(t))$ eine Stammfunktion von $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ und es gilt insgesamt:

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))|_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$

- **Wie funktioniert partielle Integration?**

Bei der partiellen Integration macht man Gebrauch von der Produktregel der Differentation. Es sei $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Es sei $F = fg$. Dann gilt nach der Produktregel:

$$F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Daraus folgt dann:

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx = F(x)|_a^b = f(x)g(x)|_a^b$$

Beispiel: Wir wollen $\int_a^b (\sin^2 x)dx = \int_a^b (\sin x \sin x)dx$ ausrechnen. Dann setzen wir: $f(x) = -\cos x$, $f'(x) = \sin x, g(x) = \sin x$ und $g'(x) = \cos x$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\int_a^b (\underbrace{\sin x}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{g(x)})dx &= \underbrace{-\cos x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{g(x)}|_a^b - \int_a^b (\underbrace{-\cos x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\cos x}_{g'(x)})dx \\ &= -\cos x \cdot \sin x|_a^b + \int_a^b (\cos^2 x)dx\end{aligned}$$

Wir schreiben nun $\cos^2 x$ als $1 - \sin^2 x$:

$$\begin{aligned}\int_a^b (\sin^2 x)dx &= -\cos x \cdot \sin x|_a^b + \int_a^b (\cos^2 x)dx \\ &= -\cos x \cdot \sin x|_a^b + \int_a^b (1 - \sin^2 x)dx \\ &= -\cos x \cdot \sin x|_a^b + \int_a^b 1dx - \int_a^b (\sin^2 x)dx \\ &= -\cos x \cdot \sin x|_a^b + (b - a) - \int_a^b (\sin^2 x)dx \\ &= (-\cos x \cdot \sin x + x)|_a^b - \int_a^b (\sin^2 x)dx\end{aligned}$$

Dann gilt also:

$$2\int_a^b (\sin^2 x)dx = (-\cos x \cdot \sin x + x)|_a^b$$

Und damit:

$$\int_a^b (\sin^2 x)dx = \frac{-\cos x \cdot \sin x + x}{2}\Bigg|_a^b$$

- **Wie funktioniert logarithmische Integration?**

Es sei $a,b \in \mathbb{R}, a < b$ und $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $\varphi(t) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$. Dann gilt:

$$\int_a^b \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \ln \frac{\varphi(b)}{\varphi(a)}$$

Beweis: Zuerst schreiben wir $\int_a^b \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}dt$ anders. Wir setzen $f(x) = \frac{1}{x}$. Dann gilt:

$$\int_a^b \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}dt = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \frac{1}{x}dx$$

Die Stammfunktion von f ist $F = \ln|x|$. Also:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \frac{1}{x} = \ln|x|\,\Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \ln|\varphi(b)| - \ln|\varphi(a)| = \ln \frac{\varphi(b)}{\varphi(a)}$$

Beispiel: Wir berechnen das Integral des Tangens:

$$\int_a^b (\tan x)dx = \int_a^b \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int_a^b \frac{-\sin x}{\cos x}dx = -(\ln|\cos x|\,|_a^b) = -\ln \frac{\cos b}{\cos a}$$

9 Uneigentliche Integrale

- **Wie ist die Gammafunktion definiert?**

Die Gammafunktion $\Gamma : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ ist über ein uneigentliches Integral definiert:

$$\Gamma(x) := \int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

- **Wofür braucht man die Gammafunktion? Zeige dies!**

Die Gammafunktion interpoliert die Fakultät, so daß diese auf reelle Zahl ausgeweitet werden kann. Es gilt:

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(n)$$

Für $n \in \mathbb{N}$ ist dann $\Gamma(n+1) = n!$.
Beweis: Der Beweis wird mittels partieller Integration geführt:

$$\begin{aligned} \int\limits_0^\infty \underbrace{t^x}_{f(t)} \underbrace{e^{-t}}_{g'(t)} dt &= -t^x e^{-t}|_0^\infty - \int\limits_0^\infty -x \cdot t^{x-1}e^{-t}dt \\ &= -t^x e^{-t}|_0^\infty + x\int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \end{aligned}$$

Betrachten wir nun $-t^x e^{-t}|_0^\infty$. Wir setzen

$$-t^x e^{-t}|_0^\infty = \lim_{a \to 0, b \to \infty} -t^x e^{-t}|_a^b = \lim_{a \to 0, b \to \infty} -b^x e^{-b} + a^x e^{-a} = 0 + 0 = 0$$

Also gilt doch insgesamt:

$$\Gamma(x+1) = \int\limits_0^\infty t^x e^{-t} = x \cdot \int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t} = x \cdot \Gamma(x)$$

Desweiteren gilt $\Gamma(1) = 1$:

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty t^0 e^{-t} = \int\limits_0^\infty e^{-t} = -e^{-t}|_0^\infty = 0 + 1 = 1$$

10 Funktionenfolgen und -reihen

• **Was ist eine Funktionenfolge?**

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellwertigen Funktionen, die alle auf D erklärt sind. Konvergiert die Folge $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ für ein $x_0 \in D$, so heißt die Folge *konvergent in* x_0. Konvergiert $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $x \in D$, so wird durch $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ auf D eine Funktion definiert.

• **Was ist der Unterschied zwischen punktweiser und gleichmäßiger Konvergenz?**

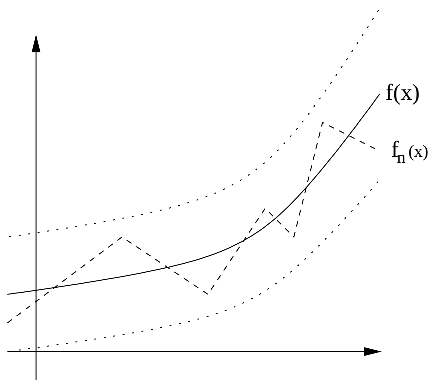
Konvergiert eine Funkionenfolge auf D gegen eine Funktion $f(x)$, so kann sie punktweise oder gleichmäßig gegen $f(x)$ konvergieren:

Punktweise Konvergenz: Bei der punktweisen Konvergenz gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_{\varepsilon,x_0} \in \mathbb{N}$, welches von ε *und* x abhängt, so daß gilt:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq n_{\varepsilon,x_0}$$

Gleichmäßige Konvergenz: Im Gegensatz zur punktweisen Konvergenz hängt bei der gleichmäßigen Konvergenz das n_ε nur noch von ε ab, so daß gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so daß gilt:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq n_\varepsilon \text{ und für alle } x \in D$$



Ein Beispiel hierfür findet sich im Rosenberger-Skript:

$$f_n(x) = x^n \text{ auf } D = [0,1]$$

• **Was ist eine Funktionenreihe?**

Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine auf $D \subseteq \mathbb{R}$ erklärte Funktionenfolge und

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

existiere für alle $x \in D$. Dann heißt die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ gleichmäßig konvergent auf D, wenn die Folge der Partialsummen

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

auf D gleichmäßig gegen $F(x)$ konvergiert: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es dann ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so daß gilt:

$$|s_n(x) - F(x)| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq n_\varepsilon \text{ und alle } x \in D$$

- **Wie lautet das Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz bei Funktionenfolgen?**

Eine Funktionenfolge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gleichmäßig auf D, wenn gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_ε, so daß gilt:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \text{ für alle } m, n \geq n_\varepsilon \text{ und für alle } x \in D$$

- **Wie lautet das Majorantenkriterium für gleichmäßige Konvergenz?**

Es seien die Funktionen $f_k(x)$ im Intervall I definiert und es gelte:

$$|f_k(x)| \leq a_k \text{ auf } I \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ sei konvergent.}$$

Dann konvergiert auch $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ gleichmäßig und absolut auf I.
Beweis:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon \text{ für alle } n \geq n_\varepsilon$$

- **Wann ist eine durch eine Funktionenfolge dargestellte Funktion stetig?**

Sei $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von auf D erklärten Funktionen, die gleichmäßig gegen $f(x)$ konvergiert. Sind die einzelnen f_n an der Stelle $a \in D$ bzw. in ganz D stetig, so gilt dasselbe für $f(x)$.
Beweis: Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben: Dann existiert wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionenfolge ein $m \in \mathbb{N}$ mit:

$$|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ für alle } x \in D$$

Da f_m stetig in $a \in D$ ist, gibt es ein $\delta > 0$, so daß $|f_m(x) - f_m(a)| < \varepsilon$ ist für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$. Für $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$ gilt also:

$$|f(x) - f(a)| \leq \underbrace{|f(x) - f_m(x)|}_{\text{gl. Konv.}} + \underbrace{|f_m(x) - f_m(a)|}_{\text{Stetigkeit von } f_m} + \underbrace{|f_m(a) - f(a)|}_{\text{gl. Konv.}} < 3\varepsilon$$

Also ist $f(x)$ stetig. Um die Bedingung für $f(x)$ zu zeigen, wählt man zu gegebenen ε (für $f(x)$) zu Beginn des Beweises einfach $\frac{\varepsilon}{3}$.

- **Wann ist eine Funktionenreihe stetig?**

Ist die Reihe $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ gleichmäßig konvergent und sind die einzelnen f_n jeweils stetig in a bzw. auf D, so gilt dasselbe für $F(x)$.

Beweis: Die Summen stetiger Funktionen sind wieder stetig. Die Partialsummen sind also stetig und konvergieren gleichmäßig. Also ist der Grenzwert $F(x)$ ebenfalls stetig.

- **Wann ist eine Funktionenfolge differenzierbar?**

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht entartetes beschränktes Intervall. Die Glieder der Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien in I differenzierbar. Konvergiert die Folge der Ableitungen $(f_n'(x))_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig und ist die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ in wenigstens einem Punkt x_0 konvergent, so ist die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine in I gleichmäßig konvergente und differenzierbare Funktion $f(x)$. Es gilt:

$$f'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

- **Wann ist eine Funktionenreihe differenzierbar?**

Wieder sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht entartetes, beschränktes Intervall. Die Glieder der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ seien in I differenzierbare Funktionen. Konvergiert die Reihe der Ableitungen $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$ gleichmäßig in I und konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ in wenigstens einem Punkt $x_0 \in I$, so ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ in I gleichmäßig konvergent und stellt eine dort differenzierbare Funktion dar. Es gilt:

$$F'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$$

Beweis: Die Summen differenzierbarer Funktionen ist wieder eine differenzierbare Funktion. Somit sind die Partialsummen differenzierbar und gleichmäßig konvergent. Der Rest folgt aus dem Satz über Konvergenz von Funktionenfolgen.

11 Potenzreihen

- **Was versteht man unter einer Potenzreihe?**

Eine Reihe der Form

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

heißt Potenzreihe. Für $x_0 = 0$ ergibt sich die Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. x_0 nennt man den *Entwicklungspunkt* und die Zahlen a_n heißen *Koeffizienten*.
Wenn eine Funktion $f(x)$ in der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ darstellbar ist, dann nennt man diese Darstellung eine *Entwicklung* von $f(x)$ in eine Potenzreihe um x_0.

- **Was ist der Konvergenzradius einer Potenzreihe?**

Jede Potenzreihe hat einen *Konvergenzradius* $R \in \overline{\mathbb{R}}$, d.h. die Reihe konvergiert für $|x| < R$ und divergiert für $|x| > R$. Für $x = R$ bzw. $x = -R$ kann sowohl Konvergenz als auch Divergenz auftreten (einzeln nachprüfen).

Es sei a der größte Haufungswert der Folge $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n \in \mathbb{N}}$ in $\overline{\mathbb{R}}$. Dann gilt für den Konvergenzradius R:

$$R = \begin{cases} 0 & \text{, falls } a = \infty \\ \infty & \text{, falls } a = 0 \\ \frac{1}{a} & \text{, falls } 0 < a < \infty \end{cases}$$

Es sei angemerkt, daß *jede* Potenzreihe für $x = x_0$ konvergiert. Also bedeutet $R = 0$, daß die Potenzreihe nur in ihrem Entwicklungspunkt konvergiert.
<u>Beweis:</u> Zuerst unterscheiden wir zwei Fälle:

1. Es gelte $a_n \leq c^n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert die Reihe für $|x| < \frac{1}{c}$. Denn für $|x| < \frac{q}{c}$ mit $q < 1$ folgt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} c^n \cdot \left(\frac{q}{c}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c^n \cdot \frac{q^n}{c^n} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

   Da $|q| < 1$ vorrausgesetzt wurde, ist $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ eine konvergente Majorante.

2. Es gelte $a_n \geq d^n$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Dann divergiert die Reihe für $|x| \geq \frac{1}{d}$. Denn in diesem Fall ist $|a_n x^n| \geq 1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ und damit divergiert die Reihe.

Nun können wir die drei Fälle betrachten:

1. Fall: Ist $a = 0$, so folgt: $|a_n| \leq c^n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Denn $\sqrt[n]{|a_n|} \leq c$ ist damit gleichbedeutend. Also konvergiert die reihe für $|x| < \frac{1}{c}$. Da c jedoch beliebig gewählt werden kann, konvergiert die Reihe also für jedes $x \in \mathbb{R}$.

2. Fall: Es gelte $a = \infty$. Dann gilt also für ein beliebiges $d \in \mathbb{R}$. $\sqrt[n]{|a_n|} \geq d$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Dies ist jedoch gleichbedeutend mit $|a_n| \geq d^n$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Damit divergiert die Folge für $|x| \geq \frac{1}{d}$. Da d beliebig gewählt werden kann, konvergiert die Folge also nur für $x = x_0$.

3. Fall: Es gelte $0 < a < \infty$. Dann wählen wir $c, d \in \mathbb{R}$ wie folgt: $0 < d < a < c < \infty$. Damit gilt: $\sqrt[n]{|a_n|} \leq c$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Die Reihe konvergiert also für $|x| < \frac{1}{c}$. Jedoch gilt auch $\sqrt[n]{|a_n|} \geq d$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Also divergiert die Folge für $|x| \geq \frac{1}{d}$. Da die $c, d \in \mathbb{R}$ beliebig zwischen 0 und a bzw. zwischen a und ∞ gewählt werden können, konvergiert die Reihe also für $|x| < \frac{1}{a}$.

- **Was gilt für die Summe bzw. für das Produkt von zwei Potenzreihen?**

Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ Potenzreihen mit den Konvergenzradien r_a bzw. r_b. Dann gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} (b_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n \text{ mit } R = \inf\{r_a, r_b\}$$

Die Multiplikation von Potenzreihe erfolgt über das Cauchy-Produkt:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (a_{n-k} b_k) \right) \cdot x^n$$

Auch hier gilt $R = \inf\{r_a, r_b\}$.

- **Zeige, daß eine Potenzreihe in ihrem Konvergenzradius gleichmäßig konvergiert!**

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $R > 0$ und es sei $0 < x_0 < R$. Dann konvergiert die Potenzreihe gleichmäßig in $[-x_0, x_0]$. Dies zeigt man über das Majorantenkriterium für gleichmäßige Konvergenz. Die Reihe konvergiert für $x = x_0$ und desweiteren gilt:

$$|a_n x^n| \leq |a_n x_0^n| \text{ für alle } x \in [-x_0, x_0]$$

Also ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ eine konvergente Majorante.

- **Wann ist eine Potenzreihe stetig?**

Die durch eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit dem Konvergenzradius $R > 0$ dargestellte Funktion $F(x)$ ist für $|x| < R$ stetig. Dies ist der Fall, da Potenzreihen in ihrem Konvergenzradius gleichmäßig konvergieren und da die einzelnen $a_n x^n$ stetig sind. Siehe auch den Satz über Stetigkeit von Funktionsreihen.

- **Was besagt der Identitätssatz für Potenzreihen?**

Seien $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ Potenzreihen mit jeweils positivem Konvergenzradius. Gilt dabei $f(x) = g(x)$ für alle $|x| < R$ oder auch nur $f(x_i) = g(x_i)$, wobei $x_i \neq 0$ und $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, so sind beide Reihen identisch, d.h. es ist $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

- **Was besagt der Abelsche Grenzwertsatz?**

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Konvergiert die Reihe auch für $x = R$, so ist die Reihe im abgeschlossenen Intervall $[0, R]$ gleichmäßig konvergent. Die Funktion $f :]-R, R] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist dann im Punkt $x = R$ linksseitig stetig. Entsprechendes gilt, wenn die Reihe für $x = -R$ konvergiert.

- **Wann ist eine Potenzreihe differenzierbar?**

Es sei $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine durch eine Potenzreihe dargestellte Funktion mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist F in jedem Punkt $|x| < R$ differenzierbar. Die Ableitung $F'(x)$ ist durch eine Potenzreihe mit dem gleichen Konvergenzradius darstellbar, nämlich die durch gliedweise Differentation entstehende:

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}$$

Beweis: Wegen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ hat die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}$ denselben Konvergenzradius. Der Rest folgt aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz von Potenzreihen in ihrem Konvergenzradius. Denn nach dem Satz über Differenzierbarkeit von Funktionenreihen, konvergiert die Funktion $F(x)$ für jedes $|x| < R$ und die Reihe der Ableitungen konvergiert ebenfalls absolut, da es sich wieder um eine Potenzreihe handelt. Desweiteren sind die einzelnen Glieder überhaupt ableitbar. Also gilt:

$$F'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}$$

Ist $F(x)$ eine durch eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$ dargestellte Funktion, so besitzt F Ableitungen beliebiger Ordnung und es gilt:

$$F^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\ldots(k-n+1) a_k x^{k-n}$$

Dies kann man auch schreiben als:

$$\frac{1}{n!} \cdot F^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} a_k x^{k-n}$$

Im Hinblick auf die Taylor-Reihen sei noch hervorgehoben, daß insbesondere gilt:

$$\frac{1}{n!} F^{(n)}(0) = a_n$$

12 Taylor-Reihen

- **Wie kommt man zu den Taylor-Reihen?**

Mit Taylor-Reihen approximiert man differenzierbare Funktionen durch ein Polynom mit einer Darstellung des Fehlerterm als Integral. Es sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion. Es sei $a \in I$, dann gilt für alle $x \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k + R_{n+1}$$

Dabei ist R_{n+1}:

$$R_{n+1} = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n \cdot f^{(n+1)}(t)dt$$

Dies beweist man per Induktion nach n. Für $n = 0$ erhalten wir:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$$

Dies ist jedoch der Hauptsatz der Differntial- und Integralrechnung. Für $n = 0$ stimmt die Behauptung also. Angenommen für eine $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion gilt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n \cdot f^{(n+1)}(t)dt$$

Ist f $(n+2)$-mal differenzierbar, dann können wir $\int_a^x (x-a)^n \cdot f^{(n+1)}(t)dt$ mit Hilfe der Partiellen Integration noch weiter untersuchen:

$$\begin{aligned}
&\int_a^x \underbrace{(x-t)^n}_{f'(x)} \cdot \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{g(x)} dt \\
= \quad & \underbrace{-\frac{(x-t)^{(n+1)}}{n+1}}_{f(x)} \cdot \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{g(x)} |_a^x - \int_a^x \underbrace{-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}}_{f(x)} \cdot \underbrace{f^{(n+2)}(t)}_{g'(x)} dt \\
= \quad & 0 + \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} \cdot f^{(n+1)}(a) + \frac{1}{n+1} \int_a^x (x-t)^{n+1} \cdot f^{(n+2)}(t)dt
\end{aligned}$$

Mit dem vor dem Integral stehenden $\frac{1}{n!}$ multipliziert ergibt sich dann wieder die Behauptung. Ist $f''(x) = 0$ für alle $x \in I$, so ist $f(x)$ ein Polynom mit $grad \leq n$. Denn in diesem Fall fällt das Integral weg.

- **Wie ist die Lagrangesche Form des Restgliedes?**

Bei der Langrangeschen Form formt man das Restglied um, so daß es kein Integral mehr ist. Ist $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion und $a, x \in I$, dann gibt es ein $\xi \in [a,x]$ (bzw. $[x,a]$), so daß gilt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot f(x-a)^{n+1}$$

Das schöne an dieser Form ist, daß das Restglied nun der Summe sehr ähnlich sieht. Wir beweisen die Äquivalenz. Auf das „normale“ Restglied wenden wir den Mittelwertsatz der Integralrechnung an:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n!}\int_a^x \underbrace{(x-t)^n}_{\varphi} \cdot \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{f} dt &= \frac{1}{n!} \cdot f^{(n+1)}(\xi) \cdot \int_a^x (x-t)^n dt \\
&= \frac{1}{n!} \cdot f^{(n+1)}(\xi) \cdot \left(- \left. \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \right|_a^x \right) \\
&= \frac{1}{n!} \cdot f^{(n+1)}(\xi) \cdot \left(- \frac{(x-x)^{n+1}}{n+1} + \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} \right) \\
&= \frac{1}{n!} \cdot f^{(n+1)}(\xi) \cdot \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} \\
&= f^{(n+1)}(\xi) \cdot \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

- **Was sind Taylor-Reihen?**

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion. Sei $a \in I$. Dann heißt

$$T_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) \cdot (x-a)^k$$

die *Taylor-Reihe* von f um den *Entwicklungspunkt a*. Im folgenden sei ohne Einschränkungen $a = 0$. Bezüglich des Konvergenzradius der Taylorreihe können drei Fälle vorkommen:

1. Der Konvergenradius von $T_{f(x)}$ ist gleich 0, d.h. $T_{f(x)}$ konvergiert nur für $x = 0$.
2. Der Konvergenzradius von $T_{f(x)}$ ist $R > 0$, jedoch konvergiert $T_{f(x)}$ nicht für jedes $x \in]-R, R[$ gegen $f(x)$. Ein Beispiel findet sich im Skript.
3. $T_{f(x)}$ hat einen Konvergenzradius $R > 0$ und konvergiert auch für jedes $x \in]-R, R[$ gegen $f(x)$. Die ist der Fall, wenn gilt:

   $$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

   Das heißt, die Folge der Restglieder konvergiert gegen 0.

- **Was sind die Taylorreihen von Potenzreihen?**

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius 0. Dann ist die Taylorreihe im Entwicklungspunkt 0 gleich dieser Potenzreihe, denn die Taylorreihe sieht wie folgt aus:

$$T_{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n$$

Es gilt nun für eine Potenzreihe nun $\frac{1}{n!} f^{(n)}(0) = a_n$ bzw. $f^{(n)}(0) = n!a_n$. Setzen wir dies in die Taylorreihe ein, erhalten wir:

$$T_{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} n!a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Dies ist jedoch wieder die oben definierte Potenzreihe.

13 Die Exponentialreihe

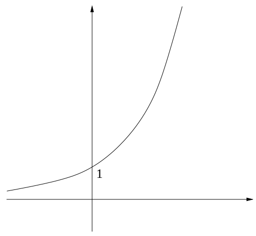
- **Wie ist die Exponentialreihe definiert?**

Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist die absolut konvergente Exponentialreihe wie folgt definiert:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Mit $x = 1$ erhält man die berühmte *Eulersche Zahl:*

$$e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots = 2.7182818\ldots$$



- **Zeige, daß die Exponentialreihe absolut konvergiert!**

Dies zeigt man mit Hilfe des Quotientenkriteriums. Mit $a_n = \frac{x^n}{n!}$ folgt für alle $n \geq 2|x|$:

$$\left|\frac{a_n + 1}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n}\right| = \left|\frac{x}{n+1}\right| = \frac{|x|}{n+1} \leq \frac{|x|}{n} \leq \frac{|x|}{2|x|} = \frac{1}{2}$$

- **Wie groß ist der Fehler, wenn man die Exponentialreihe bei N abbricht?**

Uns interessiert also die Größe $R_{N+1}(x)$ in der Reihe

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} + R_{N+1}(x)$$

bzw. der absolute Fehler $|R_{N+1}(x)|$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
|R_{N+1}(x)| &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} \\
&= \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} + \frac{|x|^{N+2}}{(N+2)!} + \frac{|x|^{N+3}}{(N+3)!} + \frac{|x|^{N+4}}{(N+4)!} + \ldots \\
&= \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)} \cdot \left\{1 + \frac{|x|}{(N+2)} + \frac{|x|^2}{(N+2)(N+3)} + \ldots\right\} \\
&\leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \cdot \left\{1 + \left(\frac{|x|}{(N+2)}\right)^2 + \left(\frac{|x|}{(N+2)}\right)^3 + \ldots\right\}
\end{aligned}$$

Jetzt betrachten wir was für $|x| = 1 + \frac{N}{2}$ gilt. Dann steht in den geschweiften Klammern doch stets

$$\frac{1 + \frac{N}{2}}{N+2} = \frac{\frac{N+2}{2}}{N+2} = \frac{(N+2)}{2(N+2)} = \frac{1}{2}$$

Für $|x| \leq 1 + \frac{N}{2}$ wird der Bruch also noch kleiner. Da in diesem Falle die geschweifte Klammer die geometrische Reihe mit $|q| < 1$ ist, kann man die gesamte Klammer also mit 2 abschätzen.

Damit folgt für $|x| \leq 1 + \frac{N}{2}$:

$$R_{N+1}(x) \leq 2 \cdot \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}$$

Mit anderen Worten: Der Fehler ist höchstens doppelt so groß wie das auf die „Abbruchstelle" folgende Glied, wenn man das N in Abhängigkeit vom x groß genug wählt.

- **Was ist das Cauchy-Produkt für Reihen?**

Wie wir schon gesehen haben, läßt sich der Grenzwert des Produktes zweier Reihen nicht so leicht bestimmen, wie die Summe oder die Differenz. Das Cauchy-Produkt besagt, wie das Produkt zweier Reihen aussieht.

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei absolute konvergente Reihen. Wir definieren

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0.$$

Dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

- **Was ist die Funktionalgleichung der Exponentialreihe? Beweise diese!**

Die Funktionalgleichung der Exponentialreihe lautet:

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

Dies beweistman mit dem Cauchy-Produkt für Folgen. Wir haben eine Exponentialreihe $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ und eine Exponentialreihe $\exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$. Nach dem Satz über das Cauchy-Produkt ergibt sich das n-te Folgenglied der Produktreihe durch:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!} \cdot (x+y)^n$$

Insgesamt ergibt dies also:

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y)$$

- **Welche weiteren Eigenschaften hat die Exponentialreihe noch?**

Desweiteren gilt noch:

1. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(x) > 0$.
2. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.

3. Für jede ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ gilt: $\exp(n) = e^n$.

Beweis: Wir beweisen zunächst 2. Nach der Funktionalgleichung gilt:

$$\exp(x) \cdot \exp(-x) = \exp(x-x) = \exp(0) = 1$$

Also folgt $\exp(-x) = (\exp(x))^{-1}$. Daraus folgt auch, daß $\exp(x) \neq 0$ ist, da $0 \cdot x = 1$ in einem Körper der mit char $= 0$ nicht gelten kann.
Punkt 1 kann für $x \geq 0$ mit der Reihendarstellung bewiesen werden:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \geq 1 > 0$$

Ist $x < 0$, so ist $-x > 0$ und somit $\exp(-x) > 0$. Also ist auch $\exp(x) = (\exp(-x))^{-1} > 0$.
Punkt 3 wird per vollständiger Induktion nach n bewiesen.

Induktionsanfang: Für $n = 0$ gilt: $\exp(0) = 1 = e^0$.

Induktionsannahme: Es gilt $\exp(n) = e^n$.

Induktionsschluß: Es gilt mit der Funktionalgleichung:

$$\exp(n+1) = \exp(n) \cdot \exp(1) = e^n \cdot e = e^{n+1}.$$

Somit wurde die Behauptung für $n \geq 0$ bewiesen. Mit Punkt 2 ergibt dies:

$$\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} = \frac{1}{e^n} = e^{-n}$$

- **Zeige, daß die Exponentialfunktion streng monoton wachsend ist!**

Zu zeigen ist also $x < y \Rightarrow \exp(x) < \exp(y)$. Wenn $x < y$ ist, gibt es also ein $z \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ mit $y = x + z$. Daraus folgt mit der Funktionalgleichung:

$$\exp(y) = \exp(x+z) = \exp(x) \cdot \exp(z) > \exp(x)$$

- **Zeige, daß** $\exp(x \cdot y) = (\exp(y))^x$ **für** $x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{R}$**!**

Dieser Beweis wird per vollständiger Induktion geführt. Zunächst wird für $n \in \mathbb{N}$ gezeigt, daß $\exp(n \cdot y) = (\exp(y))^n$ ist:

Induktionsanfang: $\exp(0y) = \exp(0) = 1 = (\exp(y))^0$.

Induktionsannahme: Für $n \in \mathbb{N}$ stimmt $\exp(ny) = (\exp(y))^n$.

Induktionsschluß:

$$\begin{aligned} \exp((n+1)y) &= \exp(ny+y) \\ &= \exp(ny) \cdot \exp(y) = (\exp(y))^n \cdot \exp(y) = (\exp(y))^{n+1} \end{aligned}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Behauptung also bewiesen. Desweiteren folgt aus

$$\exp(y) = \exp\left(n \cdot \frac{y}{n}\right) = \exp\left(\frac{y}{n}\right)^n, \text{ daß}$$

$$\exp\left(\frac{y}{n}\right) = \exp(y)^{\frac{1}{n}}$$

Damit gilt für $x = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$, daß

$$\exp\left(\frac{p}{q} \cdot y\right) = \exp\left(\frac{y}{q}\right)^p = (\exp(y))^{\frac{p}{q}}$$

Damit gilt die Behauptung für $x \in Q \wedge x \geq 0$. Für $x < 0$ gilt:

$$\exp(x \cdot y) = \frac{1}{\exp(-x \cdot y)} = \frac{1}{(\exp(y))^{-x}} = (\exp(y))^x$$

- **Zeige, daß die Exponentialreihe in jedem Punkt stetig ist!**
Zu zeigen ist, daß gilt: $\lim_{x \to a} \exp(x) = \exp(a)$. Auch dies wird mit der Funktionalgleichung gemacht. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Reihe mit $\lim_{n \to \infty} a_n = a$. Dann gilt offensichtlich $\lim_{n \to \infty}(a_n - a) = 0$, demnach ist

$$\lim_{n \to \infty} \exp(a_n - a) = 1.$$

Dann gilt weiter $\exp(a_n) = \exp(a + a_n - a)$ und mit der Funktionalgleichung:

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} \exp(a_n) = \lim_{n \to \infty} \exp(a + a_n - a) &= \lim_{n \to \infty} \exp(a) \exp(a_n - a) \\ &= \exp(a) \lim_{n \to \infty} \exp(a_n - a) = \exp(a) \end{aligned}$$

- **Was ist die Ableitung der Exponentialfunktion?**
Es gilt:

$$\exp'(x) = \exp(x)$$

Die Ableitung der Exponentialfunktion ist also wieder die Exponentialfunktion. Beweis:

$$\begin{aligned} \exp'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\exp(x+h) + \exp(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\exp(x)\exp(h) - \exp(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \exp(x) \frac{\exp(h) - 1}{h} = \exp(x) \lim_{h \to 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = \exp(x) \end{aligned}$$

Es bleibt nur noch zu zeigen, daß $\lim_{h \to 0} \frac{\exp(h)-1}{h} = 1$ gilt: Dies machen wir über eine Restgliedabschätzung. Wie wir schon oben gesehen haben, ist der Fehler für $|x| \leq 1 + \frac{N}{2}$ höchstens doppelt so groß wie das auf N folgende Glied, wenn wir die Reihe bei N abbrechen. Wir brechen die Exponentialreihe nun bei $N = 1$ ab. Es gilt:

$$\sum_{n=0}^{1} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{1} + \frac{x}{1} = 1 + x$$

Der Fehler ist höchstens doppelt so groß, wie das auf $N = 1$ folgende Glied:

$$R_2(x) \leq 2 \cdot \frac{|x^2|}{2} = |x^2|$$

Damit gilt, daß der Abstand von der kompletten Exponentialreihe zu $1+x$ höchstens $|x^2|$ groß ist:

$$|\exp(x) - (1+x)| \leq x^2$$

Wir dividieren durch x stellen die linke Seite etwas um:

$$\left| \frac{\exp(x) - 1}{x} - 1 \right| \leq |x|$$

Daraus folgt die Behauptung. Denn wenn x gegen 0 läuft, läuft auch der Abstand zwischen $\frac{\exp(x)-1}{x}$ und 1 gegen 0.
Es gibt auch noch einen alternativen Beweis über die Reihendarstellung:

$$\exp'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{1}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x)$$

14 Sinus, Cosinus, Tangens und Cotangens

- **Wie sind Sinus und Cosinus definiert?**

Es gibt jeweils eine Reihendarstellung für $\sin x$ und $\cos x$:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$
$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

- **Welche Rechengesetze gibt es für Sinus und Cosinus?**

Es gelten die folgenden 5 *wichtigen* Gesetze:

1. $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
2. $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
3. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
4. $\cos(-x) = \cos x$
5. $\sin(-x) = -\sin x$

Beweise: Die Beweise zu 1 und 2 verlaufen sehr ähnlich. Man zeigt erst mit Hilfe der Definition und des Cauchy-Produktes, was für die Summen auf der rechten Seite der Formel rauskommt. Dann nimmt man sich die linke Seite der Formel vor und zeigt mit Hilfe von Binomialkoeffizienten, daß beide Ergebnisse übereinstimmen.

4. Dies folgt direkt aus der Definition:

$$\begin{aligned} \cos(-x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{(-x)^{2k}}{(2k)!} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{(-1)^{2k} \cdot x^{2k}}{(2k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x \end{aligned}$$

5. Folgt ebenfalls direkt aus der Definition:

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{(-x)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{(-1)^{2k+1} \cdot x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= (-1) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = -\sin x \end{aligned}$$

3. Benutzt $4, 5$ und 2:

$$\begin{aligned} 1 = \cos(0) = \cos(x + (-x)) &= \cos x \cos(-x) - \sin x \sin(-x) \\ &= \cos^2 x + \sin^2 x \end{aligned}$$

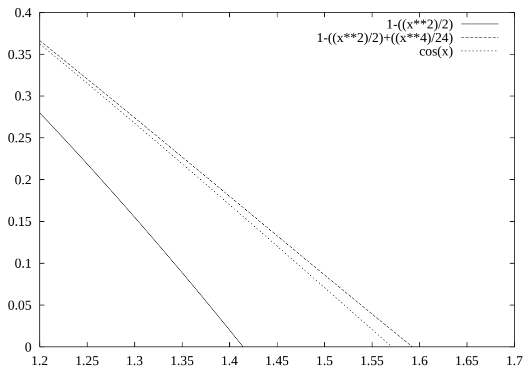
- **Zeige, daß der Cosinus eine kleinste positive Nullstelle hat!**

Zuerst einmal kann man zeigen, daß der Cosinus nach Leibniz konvergent ist (alternierend, Nullfolge und nicht negativ). Wie wir schon beim Beweis des Leibnizverfahren gesehen haben, bilden die Vorgänger der Partialsummen im Abstand 2 jeweils obere (in der Teilfolge $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$) bzw. untere (in der Teilfolge $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$) Schranken für die Nachfolgeglieder. Also ist $\cos x$ nach unten durch seine erste Partialsumme $s_1(x)$ und nach oben durch seine zweite Partialsumme $s_2(x)$ beschränkt. Dabei ist

$$s_1(x) = 1 - \frac{x^2}{2!}$$

$$s_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

Insgesamt gilt also $s_1(x) \leq \cos(x) \leq s_2(x)$. Wo haben $s_1(x), s_2(x)$ ihre Nullstellen. Es gilt $n_1 = \sqrt{2} = 1.414\ldots$ und $n_2 = \sqrt{6-2\sqrt{3}} = 1.592\ldots$.



Die Nullstelle von $\cos x$ benennen wir nun mit $\frac{\pi}{2}$. Dann gilt also folgende Abschätzung:

$$1.4 < \frac{\pi}{2} < 1.6$$

Im folgenden gehen wir also von $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ aus. Dann gilt unter anderem wegen Punkt 3, daß $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. Denn:

$$1 = \sin^2\frac{\pi}{2} + \cos^2\frac{\pi}{2} = \sin^2\frac{\pi}{2} + 0 = \sin^2\frac{\pi}{2}$$

$\sin(\frac{\pi}{2}) = -1$ kommt nicht in Frage, da wir diesen Wert wieder durch die erste Partialsumme s_1 abschätzen können und hier gilt:

$$\begin{aligned}\sin\frac{\pi}{2} > s_1\left(\frac{\pi}{2}\right) &= (-1)^0\cdot\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^1}{1!} + (-1)^1\cdot\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{3!} = \frac{\pi}{2} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{3!} \\ &> 1.4 - \frac{(1.6)^3}{6} > 0\end{aligned}$$

Also ist $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ und $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. Desweiteren gilt:

1. $\cos x > 0$ für $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$.

2. $\sin x > 0$ für $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$.

Aus den Additionstheoremen ergibt sich auch noch folgendes:

1. $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$ und $\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x$
2. $\sin(x+\pi) = -\sin x$ und $\cos(x+\pi) = -\cos x$
3. $\sin(x+2\pi) = \sin x$ und $\cos(x+2\pi) = \cos x$

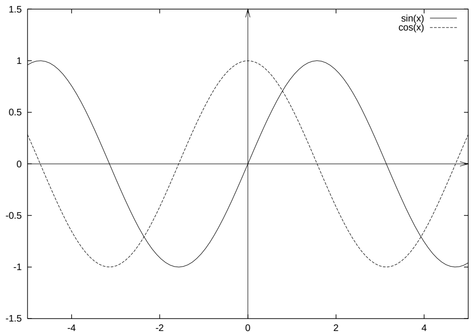
Die Beweise werden nur exemplarisch für $\sin x$ geführt. Für $\cos x$ verlaufen sie vollkommen analog:

$$\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \sin x \cos\frac{\pi}{2} + \cos x \sin\frac{\pi}{2} = \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x$$

Mit diesem Wissen beweisen wir 2:

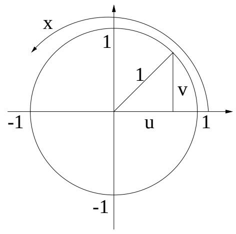
$$\begin{aligned}
\sin(x+\pi) &= \sin x \cos\pi + \cos x \sin\pi \\
&= \sin x \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) + \cos x \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \sin x \underbrace{(-\sin\frac{\pi}{2})}_{-1} + \cos x \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} \\
&= -\sin x
\end{aligned}$$

Hiermit wird dann analog 3 bewiesen. $\sin x$ und $\cos x$ sind also periodisch mit der Periode 2π. Nun können wir uns also ein Bild von den beiden Funktionen machen:



- **Was ist die Parametrisierung des Einheitskreises?**

Gegeben seien $u, v \in \mathbb{R}$ mit $u^2 + v^2 = 1$. Dann gibt es ein eindeutiges $x \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq x < 2\pi$, so daß gilt $u = \cos x$ und $v = \sin x$. Dies bedeutet quasi, daß alle Paare $(\sin x, \cos x)$ auf dem Einheitskreis liegen.



Die obige Zeichnung verdeutlicht das Problem. Was ist denn jetzt überhaupt das x? Es soll zwischen 0 und 2π liegen. Welchen Umfang hat der Einheitskreis? Die Umfangsformel für den Kreis sollte jedem aus der Schule bekannt sein. Sie lautet $U = 2\pi \cdot r$. In unserem Fall ist der Radius $r = 1$, also ist der Umfang $U = 2\pi$. Das x liegt also irgendwo auf der Kreislinie.

Wie man sieht können u und v entweder positiv oder negativ sein. x (der Pfeil auf der Kreislinie) ist mal größer und mal kleiner, je nachdem wie man die Vorzeichen von u und v wählt. Doch nun zum Beweis. Zuerst beweisen wir die Existenz:
Zuerst einmal folgern wir aus $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ und $\sin(x+\pi) = -\sin x$, daß

$$\sin\frac{3}{2}\pi = \sin(\frac{\pi}{2}+\pi) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1.$$

Aus $v^2 \leq 1$ folgert man $-1 \leq x \leq 1$. Wie wir schon gesehen haben, ist $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ und $\sin\frac{3}{2}\pi = -1$. $\sin x$ ist stetig und nimmt daher alle Werte zwischen -1 und 1 an. Also gibt es ein $x \in \mathbb{R}$, so daß $\sin x = v$. Weiter gilt:

$$u^2 = 1 - v^2 = 1 - \sin^2 x = \cos^2 x$$

Wir lösen auf und erhalten $u = \pm\cos x$. Falls also $u = -\cos x$ ist nehmen wir $y = \pi - x$. Dann stimmt die Behauptung immer noch:

$$\begin{aligned}\sin(\pi - x) &= \sin(-x+\pi) = -\sin(-x) = \sin x\\ \cos(\pi - x) &= \cos(-x+\pi) = -\cos(-x) = -\cos x\end{aligned}$$

In beiden Fällen gibt es also ein $x \in \mathbb{R}$ mit $u = \sin x$ und $v = \cos x$. Aufgrund der Periodizität können wir $0 \leq x < 2\pi$ annehmen. Nun beweisen wir die Eindeutigkeit:

Wir nehmen zwei $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ für die $u = \cos x_1 = \cos x_2$ und $v = \sin x_1 = \sin x_2$ gilt:

$$\begin{aligned}\cos(x+x_1) &= \cos x \cos x_1 - \sin x \sin x_1\\ &= \cos x \cos x_2 - \sin x \sin x_2 = \cos(x+x_2)\end{aligned}$$

Diese Formel gilt für alle x. Also setzen wir speziell $x = x - x_2$ und erhalten in obiger Gleichungskette:

$$\cos(x - x_2 + x_1) = \cos(x + x_1 - x_2) = \cos(x - x_2 + x_2) = \cos x$$

Also gilt $x_1 - x_2 = 2k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Da in unserem Fall jedoch $0 \leq x_1, x_2 < 2\pi$ gilt, folgt daraus $x_1 = x_2$, da die beiden Werte in diesem Intervall keinen größeren Abstand als 2π haben können.

- **Wie sind Tangens und Cotangens definiert?**

Der Tangens $\tan : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $D_1 = \{x \in \mathbb{R} | x \neq (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ ist definiert als:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Der Cotangens $\cot : D_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $D_2 = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ ist definiert als:

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Es gilt:

1. $\tan(x+\pi) = \tan x$ und $\cot(x+\pi) = \cot x$ für alle $x \in D_1$ bzw. $x \in D_2$.

2. $\tan(-x) = -\tan x$ und $\cot(-x) = -\cot x$ für alle $x \in D_1$ bzw. $x \in D_2$. Dies folgt aufgrund der Definition, da $\sin x$ eine ungerade und $\cos x$ eine gerade Funktion ist:

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

- **Wie sind die Arcus-Funktionen definiert?**

Die Arcus-Funktionen sind die Umkehrfunktionen zu $\sin, \cos, \tan$ und $\cot$. $\sin x$ ist im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton wachsend und stetig. Also existiert die Umkehrfunktion

$$\arcsin : [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ mit } x \mapsto \arcsin x.$$

Ebenso ist $\cos x$ im Intervall $[0,\pi]$ streng monoton fallend und stetig. Daher existiert die Umkehrfunktion

$$\arccos : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi] \text{ mit } x \mapsto \arccos x$$

Die Funktion Tangens ist im Intervall $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ streng monoton und stetig, daher existiert die Umkehrfunktion

$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

- **Entwickle $\sin x$ in eine Taylor-Reihe um den Entwicklungspunkt 0!**

Wir wissen zwar schon aus dem Kapitel über Taylor-Reihen, daß die Taylorreihe im Entwicklungspunkt 0 von einer Potenzreihe, wieder die Potenzreihe selbst ergibt, jedoch führen wir die Taylor-Entwicklung hier trotzdem noch einmal durch. Zuerst einmal bemerkt man, daß sie Ableitungen des Sinus sich ja periodisch wiederholen, d.h. es gilt:

$$\begin{aligned}
&\sin^{(0)} x = \sin x\\
&\sin^{(1)} x = \cos x\\
&\sin^{(2)} = -\sin x\\
&\sin^{(3)} x = -\cos x\\
&\sin^{(4)} x = \sin x, \text{ etc.}
\end{aligned}$$

Die Taylor-Reihe des Sinus im Entwicklungspunkt 0 lautet:

$$T_{\sin x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Betrachten wir nun die ersten $\sin^{(k)}(0)$:

$\sin(0)$	$\cos(0)$	$-\sin(0)$	$-\cos(0)$	$\sin x$	...
0	1	0	-1	0	...

Die $\sin^{(k)}(0)$ mit geradem k fallen also weg und die ungeraden ergeben alternierend 1 und -1. Berücksichtigen wir dies in unserer Taylorentwicklung, so ergibt sich wieder die Potenzreihe:

$$T_{\sin x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

15 Partialbruchzerlegung

Das Thema der Partialbruchzerlegung wird hier nur sehr oberflächlich angesprochen. Es soll nur die grobe Idee wiedergegeben werden und es wird davon ausgegangen, daß der Leser in etwa weiß, was eine rationale Funktion ist.
Sei also eine rationale Funktion

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \text{ mit } q(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in D$$

gegeben. Unser Ziel ist es nun $\int_a^b r(x)dx$ zu berechnen. Ist der Grad des Zählerpolynoms größer als der des Nennerpolynoms, so führen wir zuerst einmal eine Polynomdivision durch. Das Ergebnis ist ein Polynom und eventuell noch ein Rest, bei dem der Zähler nun jedoch kleineren Grad als der Nenner hat. Das Polynom, welches nun vor dem Rest steht, ist problemlos zu integrieren. Was machen wir jedoch mit dem Rest?

Der Rest stellt sich als das Hauptproblem heraus. Zuerst einmal haben schlaue Leute herausgefunden, daß sich jedes Polynom als Produkt einiger Primpolynome darstellen läßt. Wenn wir also diese Darstellung erreichen könnten wären wir schon einen Schritt weiter. Es stellt sich nun als äußerst hilfreich heraus, daß es nur zwei verschiedene Arten von Primpolynomen gibt, nämlich der Form

$$(x-a) \text{ bzw. } ((x-b)^2 + c^2)$$

Wenn das Primpolynom $(x-a)$ ein Teiler des Polynoms $p(x)$ (hat nichts mehr mit dem $p(x)$ von oben zu tun) ist, gibt es also ein $q(x)$, so daß gilt: $p(x) = (x-a)q(x)$. Dann ist a jedoch eine Nullstelle von $p(x)$. Kommt ein Primpolynom der Form $(x-b)^2 + c^2$ vor, müssen wir die komplexe Nullstelle von $p(x)$ berechnen. Wir erhalten eine Zerlegung also, indem wir die (eventuell komplexen) Nullstellen des Polynoms berechnen. Dies machen wir nun für das Nennerpolynom.