Prüfungsprotokoll
Mathematik für Informatiker

27. April 2000

Prüfer: Gerhard Rosenberger
Datum: 27. April 2000
Zeit: 12.00 Uhr
Note: 1.0
Literatur:

1. Lineare Algebra: Skript „Lineare Algebra“ von Gerd Wegner (korr. Fassung $8-96$)

2. Analysis: Ein Skript der Rosenberger-Vorlesung, sowie „Analysis I“ von Otto Forster

Prüfer: Was verstehen Sie unter einer Determinante?
Ich: Die Determinante unterteilt die Menge der quadratischen Matrizen in reguläre und singuläre Matrizen. Für $A \in M_n(K)$ ist die Determinante definiert als:

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} \sigma(\pi) \cdot a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)}$$

Man nimmt also aus jeder Zeile und jeder Spalte genau ein Element und multipliziert diese. Dabei geht man alle möglichen Permutationen der Spalten durch. Diese Art der Berechnung ist jedoch sehr ineffizient, da man bei einer Matrix $A \in M_n(K)$ am Ende $n!$ Summanden hat.

Prüfer: Und was bedeutet dieses $\sigma(\pi)$?
Ich: Sei $f \in S_n$, dann ist das Signum dieser Permutation definiert als:

$$\sigma(f) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{f(i) - f(j)}{i - j} \in \{-1, 1\}$$

Das Signum bildet also aus der Menge der Permutationen in die Menge $\{-1, 1\}$ ab.

Prüfer: In meiner Vorlesung, die ich momentan halte, habe ich die Determinante anders eingeführt. Ich habe erst ihre Eigenschaften angegeben und dann gezeigt, daß die Abbildung mit diesen Eigenschaften eindeutig ist. Wie könnte man dies machen?
Ich: Ähh, ja ich zähle erst mal die Eigenschaften der Determinante auf:

1. Die Determinante der Einheitsmatrix E_n ist 1.

2. Enthält die Matrix eine Nullzeile oder kommen zwei Zeilen doppelt vor, so ist die Determinante 0.

3. Vertauscht man zwei Zeilen, so ändert die Determinante ihr Vorzeichen.
4. Multipliziert man eine Zeile mit $\lambda \in K$, so ist das Ergebnis das λ-fache der alten Determinante.
5. Addiert man eine mit λ multiplizierte Zeile zu einer anderen Zeile, ändert sich nichts an der Determinante.

Prüfer: Wie könnte man nun zeigen, daß die Abbildung, die die Determinante realisiert, eindeutig ist, wenn sie diese Eigenschaften besitzt? Angenommen, ich habe die Abbildung det und die Abbildung $\overline{\det}$. Wie könnte ich die Gleichheit zeigen?
Ich: Nach einiger Zeit brachte er mich darauf, daß man die Matrix mit elementaren Zeilenumformungen auf die Dreiecksform bringen kann und dann nur noch die Elemente auf der Hauptdiagonalen multipliziert werden müssen.

Prüfer: Sie haben ja gesagt, daß die Berechnung mit der Definition sehr aufwendig sein kann. Welche Möglichkeiten gibt es denn noch?
Ich: Entweder bringt man sie auf Diagonalform oder man benutzt die Entwicklung nach einer Zeile bzw. Spalte mit Laplace.

Diagonalform: Um die Matrix auf Diagonalform zu bringen, braucht man nur das Vertauschen zweier Zeilen und die Addition einer mit λ multiplizierten Zeile zu einer anderen. Dabei muß man sich merken, wie oft man Zeilen vertauscht hat, da sich bei dieser Operation das Vorzeichen der Determinante ändert. Entsteht die Diagonalmatrix $B = (b_{ij})$ aus $A \in M_n(k)$ dadurch, daß man k Zeilenvertauschungen und beliebig viele Zeilenadditionen macht, so gilt:

$$\det A = (-1)^k \cdot b_{11} \cdot b_{22} \cdot \dots \cdot b_{nn}$$

Laplace: Es sei A_{ik} die Matrix, die entsteht, wenn man in $A \in M_n(K)$ die i-te Zeile und k-te Spalte streicht. Dann ist die Entwicklung der Determinante nach der i-ten Zeile definiert als:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \cdot \det A_{ik}$$

Dieses Verfahren lohnt sich besonders, wenn die Matrix viele Nullen enthält.

Prüfer: Haben Sie in der Vorlesung auch die Diagonalisierbarkeit von Matrizen durchgenommen?
Ich: Ja.

Prüfer: Wie funktioniert das denn?
Ich: Sei $A \in M_n(K)$. Das charakteristische Polynom der Matrix A ist definert als

$$\chi_A = \det(A - \lambda E_n).$$

Wenn man dieses explizit aufschreibt, so zerfällt es in Linearfaktoren. Achja, man muß die Nullstellen des charakteristischen Polynoms berechnen.

Prüfer: Warum die Nullstellen?
Ich: Wir möchten ja die Eigenvektoren der Matrix berechnen. Ein Eigenvektor $\vec{x}$ zum Eigenwert λ ist ja ein Vektor, für den gilt:

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

Dies kann man noch weiter umformen:

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= \lambda E_n \vec{x} \\ A\vec{x} - \lambda E_n \vec{x} &= \vec{0} \\ (A - \lambda E_n)\vec{x} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Dies ist ein homogenes Gleichungssystem, von dem uns jedoch nur die nicht trivialen Lösungen interessieren, da der Nullvektor $\vec{0}$ Eigenvektor zu jedem Eigenwert ist. Damit das Gleichungssystem mehr als nur die triviale Lösung hat, muß die Dimension des Lösungsraum also echt größer als 0 sein, denn es gilt ja:

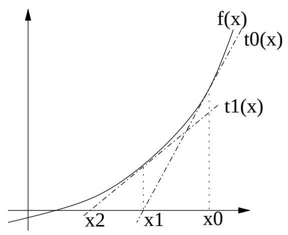
$$\dim L(A - \lambda E_n, \vec{0}) = n - \text{rg } (A - \lambda E_n)$$

Wenn der Rang von $(A - \lambda E_n) \in M_n(K)$ also kleiner als n ist, existieren nicht triviale Lösungen. Also muß die Determinante gleich 0 sein.

Prüfer: Gut. Was mache ich dann mit den Nullstellen?
Ich: Ist λ eine solche Nullstelle, dann setze ich dieses in $(A - \lambda E_n)$ ein und löse das homogene Gleichungssystem. Der Lösungsraum ist dann der Eigenraum zum Eigenwert λ. Aus den Eigenvektoren kann ich dann eine Basis des Vektorraumes bilden, indem ich sie in einer Matrix zusammenfasse. Die Matrix von rechts und ihre Inverse von links an die Matrix A multiplziert, gibt dann die Diagonalmatrix.

Prüfer: Probleme gibt es nur, wenn das charakteristische Polynom nicht in n verschiedene Linearfaktoren zerfällt.
Ich: Dann muß die algebraische Vielfachheit der Nullstelle λ gleich der Dimension des Eigenraumes $\text{Eig}(\lambda)$ sein.

Prüfer: Kommen wir zur Analysis. Sagt ihnen das Newton-Verfahren etwas?
Ich: Es wird zur Nullstellenberechnung benutzt. Gegeben sei eine stetige, differenzierbare Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$:



Wir nehmen uns einen Punkt x_0 und nähern den Graphen in diesem Punkt durch die Tangente $t_0(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ an. Von dieser Tangente berechnen wir die Nullstelle und nehmen diese als Punkt x_1, von dem wir wieder die Tangente berechnen. Das Verfahren muß jedoch nicht konvergieren.

Prüfer: Schreiben sie mir mal die Folge der x_n auf!
Ich: Es gilt:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Das Verfahren konvergiert jedoch immer für konvexe Funktionen $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, die zweimal differenzierbar sind, mit $\forall x \in [a, b] : f''(x) \geq 0, f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Denn dann kann man folgendes zeigen:

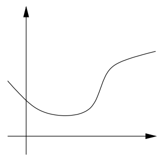
1. Es existiert *genau eine* Nullstelle.
2. Wählt man ein x_0 mit $f(x_0) > 0$ als Startwert, so konvergiert die Folge gegen die Nullstelle.

Prüfer: Sie haben ja gerade das Kriterium

$$f''(x) > 0 \text{ für alle } x \in [a,b] \Leftrightarrow f \text{ ist konvex}$$

erwähnt. Können sie dies beweisen?
Ich: Ehrlich gesagt nicht.

Prüfer: Das ist ja auch ein sehr technischer Beweis. Können sie denn so etwas darüber aussagen, was gilt, wenn die zweite Ableitung immer größer gleich 0 ist?
Ich: Dann ist die erste Ableitung streng monoton steigend und folgendes kann dementsprechend nicht passieren:



Prüfer: Sagt ihnen der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung etwas?
Ich: Wo soll ich denn da anfangen? Ich schreibe ihn erst einmal auf: Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion und $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Prüfer: Beweisen Sie mal die Existenz einer Stammfunktion.
Ich: Das macht man über das sogenannte unbestimmte Integral. Es sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, mit $a, x \in I$. Dann definieren wir eine Funktion $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ über:

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx$$

Man kann zeigen, daß für diese Funktion $F'(x) = f(x)$ gilt.

Prüfer: Machen Sie das mal.
Ich: Zuerst einmal schreibe ich den Differentialquotienten hin und forme ihn etwas um:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) \\ &= \lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(x)dx - \int_a^x f(x)dx\right) \\ &= \lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)dx \end{aligned}$$

Auf $\int_x^{x+h} f(x)dx$ wenden wir nun den Mittelwertsatz der Differentialrechnung an, mit $\varphi(x) = 1$. Also:

$$\lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\varphi(x)dx = \lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{1}{h} f(x_0)(x+h-x)$$

Dabei ist $x_0 \in [x, x+h]$. Es gilt also:

$$\lim_{h \to 0, h \neq 0} \frac{1}{h} f(x_0)(x+h-x) = \lim_{h \to 0, h \neq 0} f(x_0)$$

Da das x_0 aus dem Intervall $[x, x+h]$ kommt und h gegen 0 strebt, strebt also das x_0 gegen x. Da die Funktion stetig ist, folgt daraus:

$$\lim_{x_0 \to x} f(x_0) = f(x)$$

Kommentar: Herr Rosenberger ist als Prüfer sehr zu empfehlen. Die Prüfungsatmosphäre ist relativ locker und er sieht es auch nicht allzu eng, wenn die Bedingungen für einige Beweise nicht ganz so exakt sind. Hauptsache man schreibt überhaupt etwas hin und zeigt, daß man die Zusammenhänge verstanden hat. Überhaupt kommt es Herrn Rosenberger sehr auf das mathematische Verständnis an. Als ich auf die Eindeutigkeit der Determinante eingehen sollte, sagte er, daß er keinen Beweis von mir wolle, sondern nur, daß ich mir dazu mal ein paar Gedanken mache.

Ich habe für diese Prüfung drei Monate lang gelernt, im Schnitt $3-4$ Stunden pro Tag. Die meiste Zeit dürfte dabei allerdings für das Erstellen einer eigenen Zusammenfassung mit LaTeX draufgegangen sein, was ich jedoch nur weiterempfehlen kann.

Den „heiligen“ Fragenkatalog kann ich nur insofern weiterempfehlen, als daß er einen Überblick gibt, auf welchen Stoff Herr Rosenberger Wert legt. Wenn man die Fragen alle einigermaßen beantworten kann und auch die Zusammenhänge verstanden hat, sollte man die Prüfung eigentlich bestehen. Ich kann jedoch nur davor warnen, die Antworten aus dem Katalog heraus auswendig zu lernen. Teilweise sind sie einfach falsch, so daß es sinnvoller ist, die Fragen aus dem Katalog auf Karteikarten zu schreiben und für sich selbst aus Skripten und Büchern heraus zu beantworten. Wer Interesse an meinen Zusammenfassungen (eine LinA, eine Ana) hat, kann mir mailen:

`gregor01@marvin.cs.uni-dortmund.de`

Viel Glück!